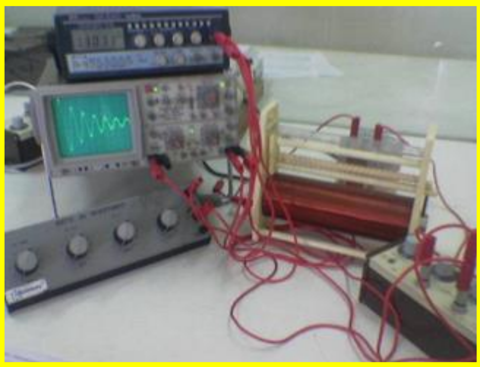
بسم الله الرحمن الرحيم
السلام عليكم ورحمة الله وبركاته

الثانية باكالوريا
الفيزياء

التذبذبات الحرة في دارة RLC متوالية
Les oscillations libres dans un circuit RLC série

الجزء الثالث :
الكهرباء
الوحدة 3
8 س

1- تفريغ مكثف في وشيعة :



1-1- الدراسة التجريبية :

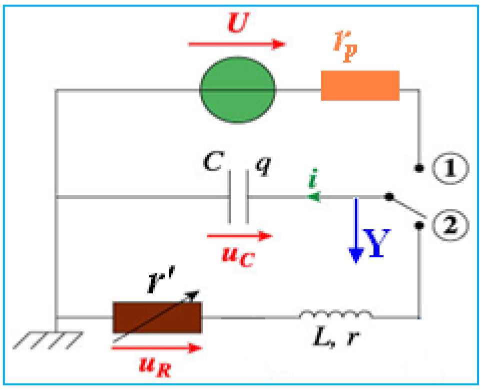
ننجز التركيب التجريبي الممثل جانبه .

نؤرجح قاطع التيار إلى الموضع 1 لمدة زمنية كافية .

نؤرجح قاطع التيار إلى الموضع 2 فنحصل على دارة RLC متوالية .

نعاين التوتر $u_C(t)$ بين مربطي المكثف .

نعيد التجربة عدة مرات برفع قيمة المقاومة r' .



أ- لماذا نؤرجح أولا قاطع التيار إلى الموضع 1 ؟

نؤرجح أولا قاطع التيار إلى الموضع 1 لشحن المكثف .

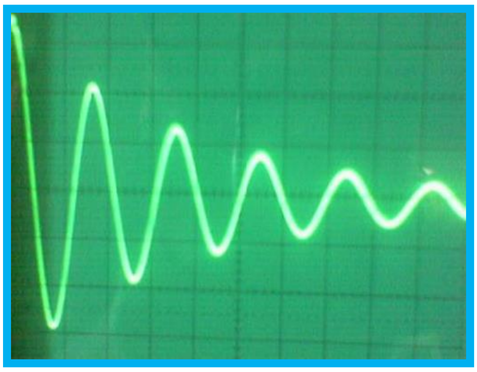
ب- ما الظاهرة التي تحدث عندما نؤرجح قاطع التيار إلى الموضع 2 ؟

تحدث ظاهرة تفريغ المكثف في الو شيعة .

ج- كيف يتغير وسع وإشارة التوتر $u_C(t)$ ؟ هل $u_C(t)$ دالة دورية ؟

يتناقص وسع التوتر $u_C(t)$ مع الزمن و هو متناوب نقول إنه تذبذبي مخمد .

$u_C(t)$ ليست دالة دورية .



د- نسمي شبه الدور T المدة الزمنية الفاصلة بين قيمتين قصويين متتاليتين للتوتر $u_C(t)$. عين مبيانيا T .

مبيانيا نجد $T = 0,3\ ms$.

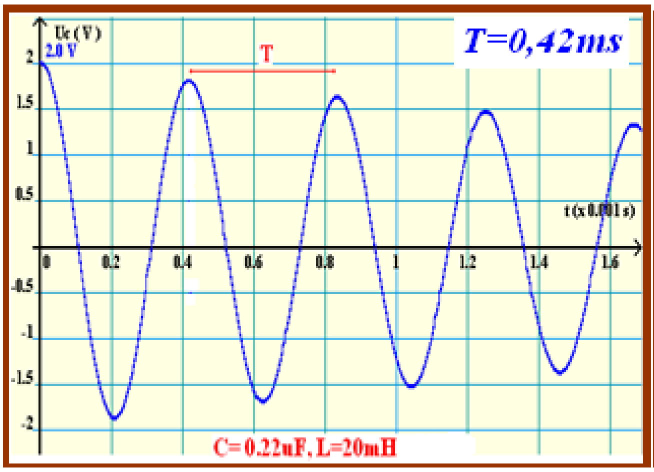
ه- ما تأثير المقاومة R على وسع الذبذبات وشبه الدور T ؟

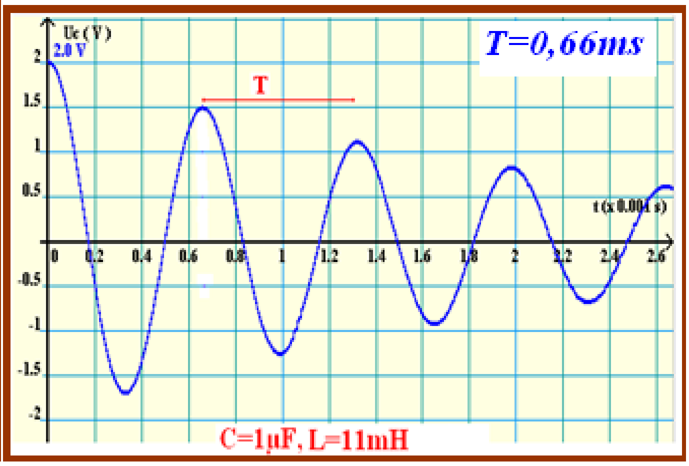
تزايد المقاومة R يتناسب مع تناقص $u_C(t)$.

تغير المقاومة R لا يؤثر في شبه الدور T .

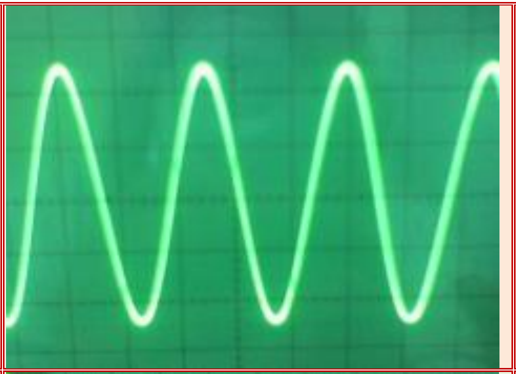
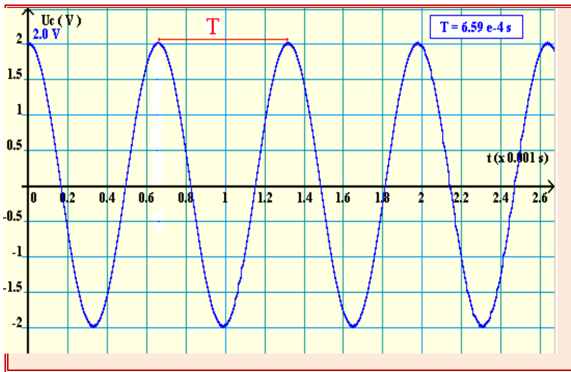
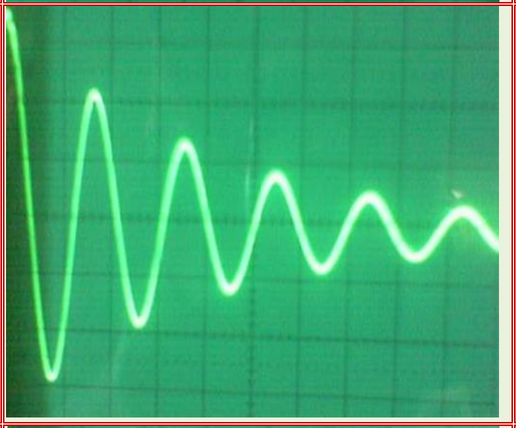
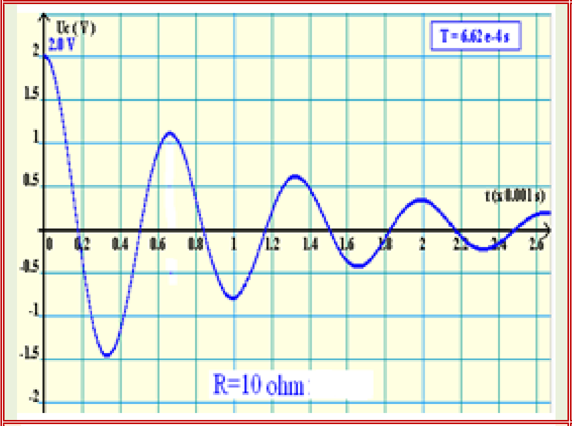
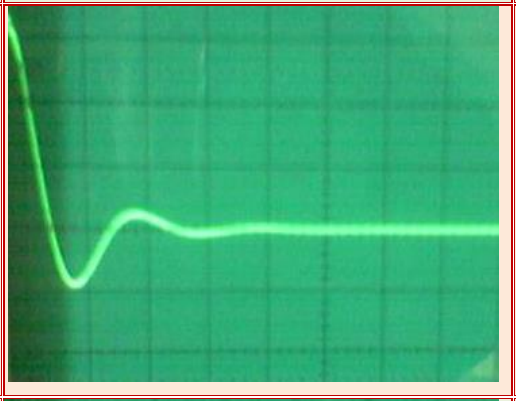
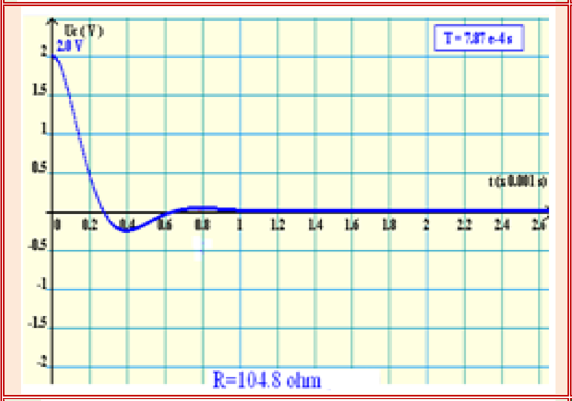
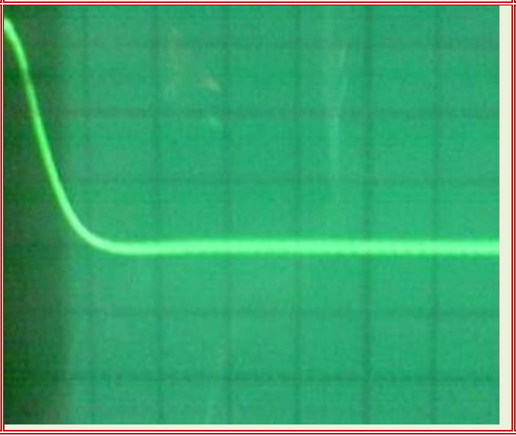
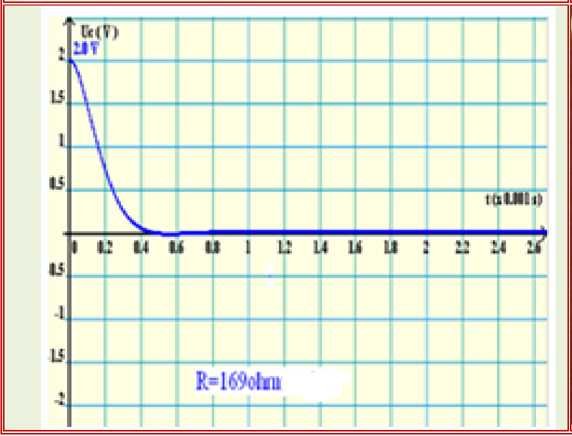
و- ما تأثير معامل التحريض L وسعة المكثف C على شبه الدور T ؟

يتناسب شبه الدور T مع معامل التحريض L وسعة المكثف C .





1-2- أنظمة التذبذبات الحرة لدارة RLC متوالية :

نظام دوري	R=0 تذبذبات حرة وغير مخمدة		
نظام شبه دوري	R صغيرة يتناقص وسع التوتر $u_C(t)$ مع الزمن		
نظام حرج	R كبيرة $R = \sqrt{\frac{L}{C}}$		
نظام لا دوري	R كبيرة جدا تزول الذبذبات لوجود خمود مهم		

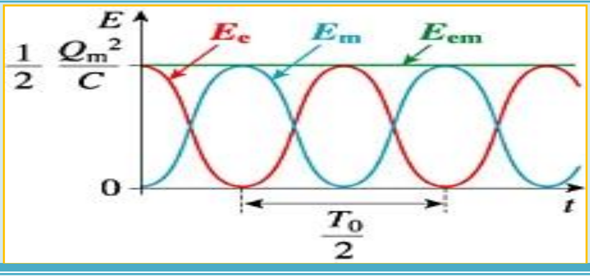
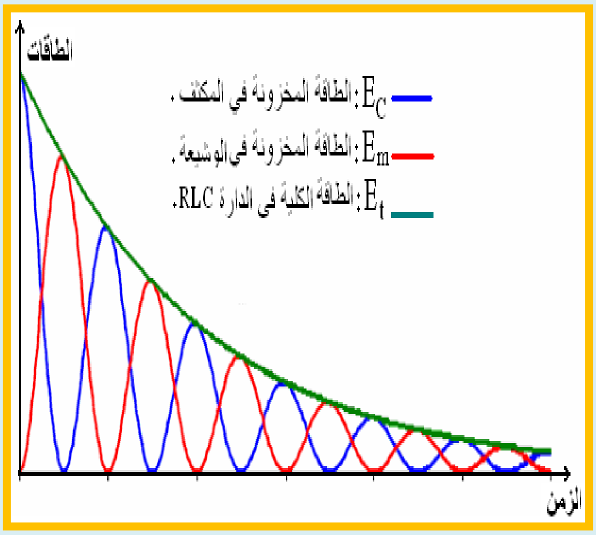
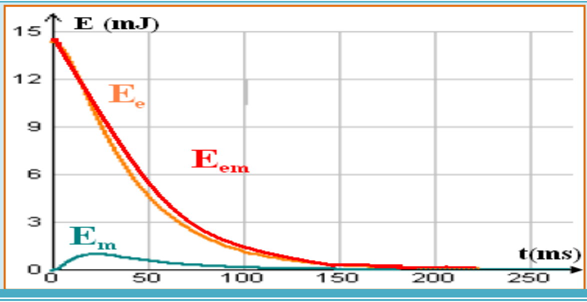
يؤدي تفريغ مكثف مشحون ، في وشيعة دارة RLC متوالية ، إلى ظهور ذبذبات حرة (لعدم تزويد الدارة RLC بالطاقة بعد اللحظة البدئية) و مخمدة (يتناقص وسع التوتر $u_C(t)$ مع الزمن) .
نقول إن الدارة RLC المتوالية تكون متذبذبا كهربائيا حرا و مخمدا .

حسب قيمة R مقاومة الدارة RLC ، نميز أنظمة الذبذبات : نظام دوري – نظام شبه دوري – نظام حرج – نظام لا دوري .

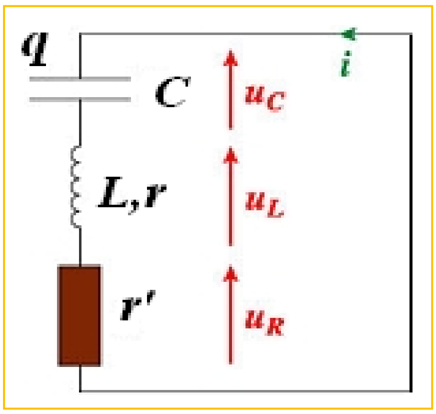
شبه الدور T المدة الزمنية الفاصلة بين قيمتين قصويين متتاليتين للتوتر $u_C(t)$.

لا يتعلق شبه الدور T بالمقاومة R ، ولكن يتعلق بمعامل التحريض L و سعة المكثف C .

1-3- التفسير الطاقي :

نظام دوري	تنحفظ الطاقة الكلية للدارة لأن مقاومة الدارة منعدمة وكذلك الطاقة المبددة بمفعول جول	
نظام شبه دوري	تكون الطاقة E_e المخزونة في المكثف قصوى عندما تكون الطاقة المخزونة في الوشيعة E_m منعدمة والعكس . تتناقص الطاقة E_e عندما تتزايد الطاقة E_m والعكس مما يدل على أن الطاقة E_e تتحول إلى الطاقة E_m والعكس . تتناقص الطاقة الكلية E مع مرور الزمن نتيجة تبدد جزء منها بمفعول جول عند كل تبادل طاقي بين المكثف و الوشيعة . تغيرات الطاقة E_e و الطاقة E_m شبه دورية وشبه دورها يساوي نصف شبه دور التوتر u_C .	
نظام لا دوري	تتناقص الطاقة E_e بمفعول جول إلى أن تنعدم . تتحول الطاقة E_e إلى الطاقة E_m والعكس غير صحيح .	

1-4- المعادلة التفاضلية لدارة RLC متوالية :



لدينا حسب قانون إضافية التوترات : $u_R + u_L + u_C = 0$

وحسب قانون أوم : $u_R = r'.i$ ولدينا $u_L(t) = r.i + L.\frac{di}{dt}$

ولدينا حسب توجيه الدارة $i = \frac{dq}{dt} = \frac{d(C.u_C)}{dt} = C.\frac{du_C}{dt}$

وبالتالي $u_L(t) = rC\frac{du_C}{dt} + LC\frac{d^2u_C}{dt^2}$ و $u_R = r'C.\frac{du_C}{dt}$

إذن $r'C.\frac{du_C}{dt} + rC\frac{du_C}{dt} + LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + u_C = 0$

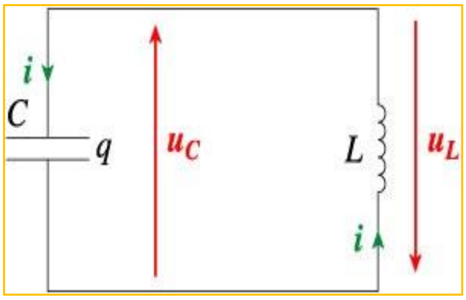
نضع $R = r + r'$ إذن $\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{R}{L}.\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC}u_C = 0$

المعادلة التفاضلية لدارة RLC متوالية التي يحققها التوتر $u_C(t)$ بين مربطي المكثف هي :

$$\frac{d^2u_C}{dt^2}+\frac{R}{L}.\frac{du_C}{dt}+\frac{1}{LC}u_C=0$$ يعبر المقدار $\frac{R}{L}.\frac{du_C}{dt}$ عن ظاهرة خمود الذبذبات .

نعلم أن $u_C=\frac{q}{C}$ إذن ، المعادلة التفاضلية التي تحققها الشحنة q هي : $\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{R}{L}.\frac{dq}{dt}+\frac{1}{LC}q=0$

2- الدراسة التحليلية لدارة مثالية LC :



2-1- المعادلة التفاضلية :

نصل مربطي مكثف سعته C مشحون بدئيا ، بوشيعة معامل تحريضها الذاتي L ومقاومتها الداخلية مهملة .

لدينا حسب قانون إضافية التوترات : $u_L+u_C=0$

ولدينا حسب توجيه الدارة $i=\frac{dq}{dt}=\frac{d(C.u_C)}{dt}=C.\frac{du_C}{dt}$

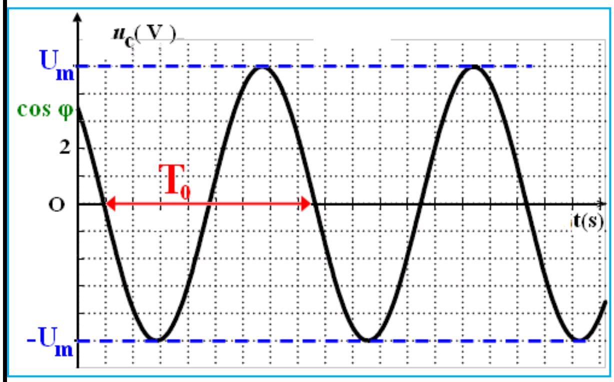
ولدينا $u_L(t)=L.\frac{di}{dt}=LC\frac{d^2u_C}{dt^2}$ وبالتالي $\frac{d^2u_C}{dt^2}+\frac{1}{LC}u_C=0$

المعادلة التفاضلية لدارة LC مثالية التي يحققها التوتر $u_C(t)$ بين مربطي المكثف هي :

$$\frac{d^2u_C}{dt^2}+\frac{1}{LC}u_C=0$$

نعلم أن $u_C=\frac{q}{C}$ إذن ، المعادلة التفاضلية التي تحققها الشحنة q هي : $\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{1}{LC}q=0$

2-2- حل المعادلة التفاضلية :



يكتب حل المعادلة التفاضلية على الشكل التالي :

$$u_C(t)=U_m\cos(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi)$$

U_m وسع الذبذبات (الوسع القصوي للتوتر u_C) ووحدته V

T_0 الدور الخاص للذبذبات مع $\omega_0=\frac{2\pi}{T_0}$ النبض الخاص

مع $N_0=\frac{1}{T_0}$ التردد الخاص .

$\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi$ الطور عند اللحظة t .

φ الطور البدئي $(t=0)$ ويعبر عنها بالراديان (rad) ونختار $-\pi\leq\varphi<\pi$.

يتم تحديد قيم U_m و φ من خلال الشروط البدئية (لأن التوتر u_C و التيار المار في الوشيعة متصلين) .

لدينا $i=C.\frac{du_C}{dt}$ أي $i(t)=-\frac{2\pi}{T_0}C.U_m\sin(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi)$.

ونعلم أن $i(0)=-\frac{2\pi}{T_0}CU_m\sin(\varphi)=0$ أي $\sin(\varphi)=0$

ومنه : $\varphi=0$ أو $\varphi=\pi$.

$$[\cos(ax+b)]'=-a.\sin(ax+b)$$

$$[\sin(ax+b)]'=a.\cos(ax+b)$$

المكثف مشحون بدئيا $u_C(0)=U_m\cos(\varphi)=E$ أي $\cos(\varphi)=\frac{E}{U_m}>0$ إذن $\varphi=0$.

لدينا $U_m\cos(\varphi)=U_m\cos(0)=E$ إذن $U_m=E$. وبالتالي : $u_C(t)=E\cos(\frac{2\pi}{T_0}t)$

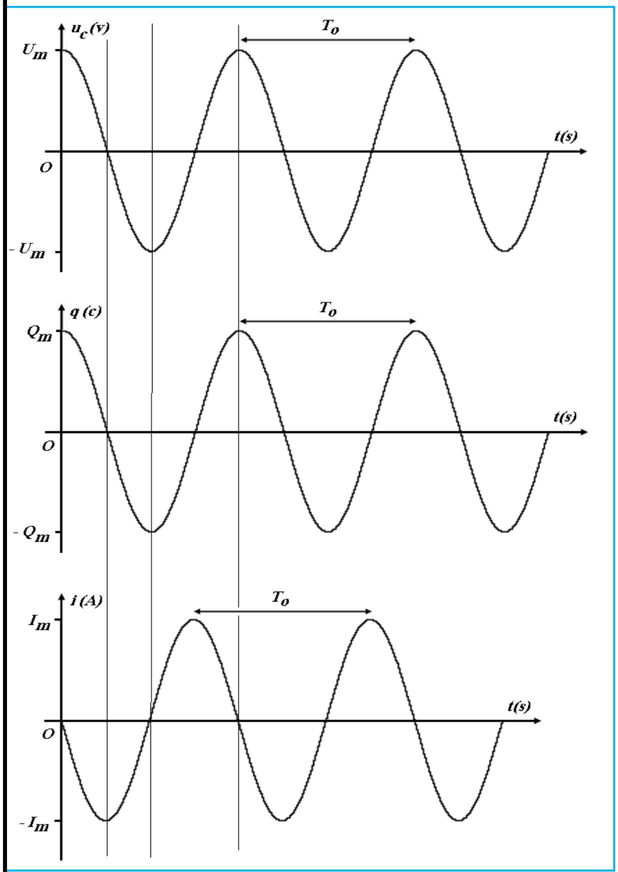
2-3- الدور الخاص للتذبذبات :

لدينا $u_C(t) = U_m\cos(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi)$ أي $\frac{du_C}{dt} = -\frac{2\pi}{T_0}U_m\sin(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi)$

ومنه فإن $\frac{d^2u_C}{dt^2} = -(\frac{2\pi}{T_0})^2U_m\cos(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi)$ يعني $\frac{d^2u_C}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2u_C(t)$

نعوض في المعادلة التفاضلية : $-\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2u_C(t)+\frac{1}{LC}u_C(t)=0$ أي $\left[-\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2+\frac{1}{LC}\right]u_C(t)=0$

تتحقق المعادلة كيفما كانت t إذا كان $-\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2+\frac{1}{LC}=0$ أي $T_0 = 2\pi\sqrt{L.C}$



ملحوظة :

لدينا $T_0 = 2\pi\sqrt{L.C}$ مع $C = \frac{i}{\frac{du_C}{dt}}$ و $L = \frac{u_L}{\frac{di}{dt}}$

أي $[C] = \frac{[i]}{\frac{[u]}{[t]}}$ و $[L] = \frac{[u]}{\frac{[i]}{[t]}}$ إذن $[T_0] = [\sqrt{L.C}]$

$[T_0] = \sqrt{\frac{[u]}{\frac{[i]}{[t]}}\cdot\frac{[i]}{\frac{[u]}{[t]}}} = \sqrt{[t^2]} = [t]$ أي $[T_0] = [t]$

إذن الدور الخاص T_0 له بعد الزمن ونعبر عنه بالثانية .

شبه الدور T للتذبذبات في دارة RLC متوالية مخمدة قليلا يساوي تقريبا الدور الخاص T_0 للمتذبذب غير المخمد .

$T \approx T_0 = 2\pi\sqrt{L.C}$

2-4- تعبير الشحنة q وشدة التيار i :

لدينا $q = C.u_C$ إذن $q(t) = Q_m\cos(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi)$

مع $Q_m = CU_m$

ولدينا $i = \frac{dq}{dt}$ إذن $i(t) = I_m\cos(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi+\frac{\pi}{2})$

مع $I_m = \frac{2\pi}{T_0}Q_m$

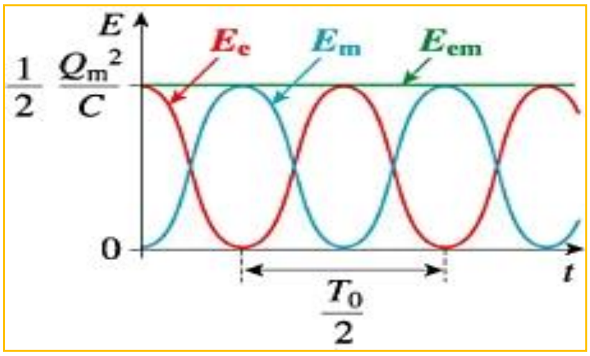
$-\sin(\omega t) = \cos(\omega t+\frac{\pi}{2})$

$\sin(\omega t) = \cos(\omega t-\frac{\pi}{2})$

الدالتان $u_C(t)$ و $i(t)$ جيبيتان وهما على تربيع في الطور أي عندما تكون إحداهما منعدمة تكون الأخرى قصوى أو دنيا .

3- انتقالات الطاقة بين المكثف و الوشيعة :

3-1- الطاقة في الدارة LC المثالية :



الطاقة الكلية المخزونة في الدارة LC في كل لحظة هي

$$E_t = E_e + E_m = \frac{1}{2}Cu_C^2+\frac{1}{2}Li^2$$

لدينا حسب قانون إضافية التوترات : $u_L+u_C=0$

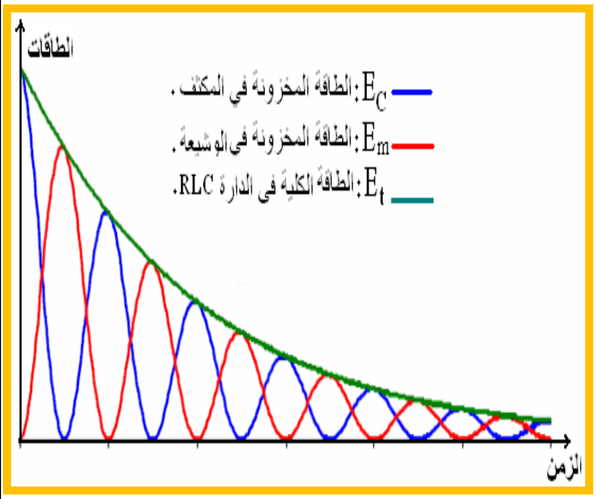
أي $\frac{q}{C}+L\frac{di}{dt}=0$ نضرب المتساوية في $i=\frac{dq}{dt}$

فنجد $\frac{q}{C}\frac{dq}{dt}+Li\frac{di}{dt}=0$ أي $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}+\frac{1}{2}Li^2\right)=0$

وبالتالي $E_t = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}+\frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}Cu_C^2+\frac{1}{2}Li^2 = cte$

⊕ تكون الطاقة الكلية لدارة مثالية LC ثابتة وتساوي الطاقة البدئية المخزونة في المكثف .

⊕ خلال التذبذبات غير المخمدة ، تتحول الطاقة الكهربائية في المكثف إلى طاقة مغنطيسية في الوشيعة و العكس . $E_t = \frac{1}{2}Cu_C^2 + \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}CU_m^2 = \frac{1}{2}LI_m^2$



2-3- الطاقة في الدارة RLC المتوالية :

الطاقة الكلية المخزونة في الدارة RLC في كل لحظة هي

$E_t = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} + \frac{1}{2}Li^2$ تغير الطاقة الكلية هو

$$\frac{dE_t}{dt} = \frac{q}{C}\frac{dq}{dt} + Li\frac{di}{dt} = i(\frac{q}{C} + L\frac{d^2q}{dt^2})$$

وباعتبار المعادلة التفاضلية $\frac{d^2q}{d^2} + \frac{R}{L}.\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = 0$

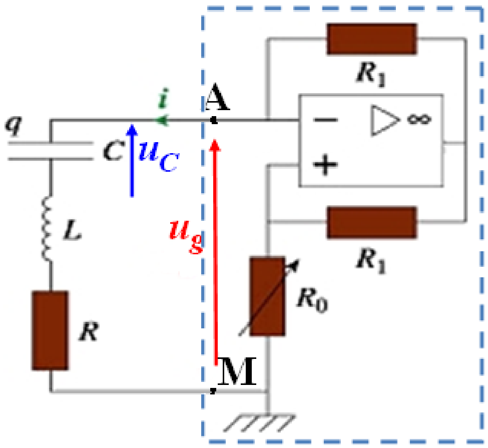
فإن $L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{C}q = -R\frac{dq}{dt} = -Ri$ أي $\frac{dE_t}{dt} = -Ri^2$

و هكذا يتضح أن :

✍ الطاقة الكلية E_t تناقصية لأن $\frac{dE_t}{dt} < 0$.

✍ التناقص الطاقي يعزى لوجود المقاومة R .

تتناقص الطاقة الكلية لدارة RLC متوالية تدريجيا بسبب مفعول جول .

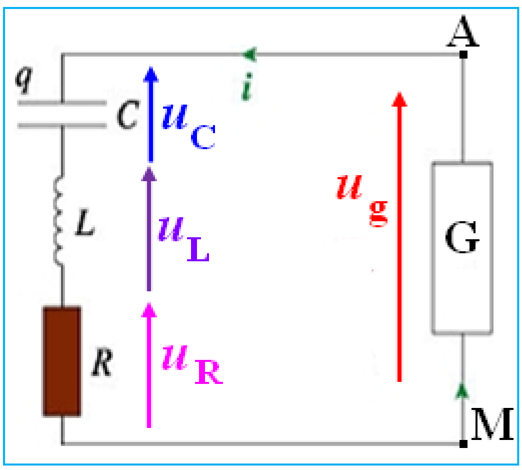


4- صيانة التذبذبات :

يمكن صيانة تذبذبات دارة RLC متوالية والحصول على توتر متذبذب ذي وسع ثابت ، باستعمال جهاز يزود الدارة بطاقة تعوض الطاقة المبددة في الدارة بمفعول جول .

جهاز الصيانة عبارة عن مولد يزود الدارة بتوتر u_g يتناسب اطرادا مع شدة التيار $i(t)$. $u_g = R_0.i$ و هو يتصرف كمقاومة سالبة .

و هكذا تكون المقاومة الكلية للدارة منعدمة عندما نختار $R_0 = R$.



نعتبر التركيب التجريبي التالي حيث المولد G يمثل جهاز الصيانة .

القدرة المبددة بمفعول جول في الدارة RLC هي $\mathcal{P}_{th} = R.i^2$.

القدرة التي يمنحها المولد G هي $P_g = u_g.i$.

ليعوض المولد القدرة المبددة بمفعول جول يجب أن يكون

$\mathcal{P}_{th} = \mathcal{P}_g$ وبالتالي $u_g = R.i$.

نطبق قانون إضافية التوترات فنجد $u_R + u_L + u_C = u_g$

أي $R.i + LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + u_C = R.i$

إذن $LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + u_C = 0$

وبالتالي نحصل على المعادلة التفاضلية لدارة LC مثالية أي أن التذبذبات جيبية ذات وسع ثابت دورها

$T_0 = 2\pi\sqrt{L.C}$.