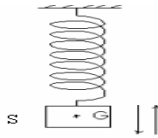


1^{er} Exercice : Pendule élastique vertical:

On considère un pendule élastique vertical constitué d'un ressort de constante de raideur $k=20\text{N/m}$ et d'un corps solide de masse $m=200\text{g}$.

On écarte le corps S verticalement vers le bas à partir de sa position d'équilibre d'une distance égale à 3cm et on le lâche sans vitesse initiale.



A l'instant $t=0$ le corps passe de la position d'équilibre stable G_0 dans le sens positif.

- 1) Déterminer l'allongement du ressort à l'équilibre $\Delta\ell_0$
- 2) Déterminer l'équation différentielle du mouvement.
- 3) Donner l'équation horaire du mouvement.
- 4) Déterminer la période propre du mouvement. On donne $g=10\text{N/kg}$.

1) Le système étudié : {le corps S à l'équilibre}

Bilan des forces: à l'équilibre le corps S est soumis à l'action des forces suivantes :

- \vec{P} : son poids.
- \vec{T}_0 : la tension du ressort à l'équilibre.

D'après la condition d'équilibre du corps S on a donc: $T_0 = P = m.g \Rightarrow K.\Delta\ell_0 = m.g$

$$\Delta\ell_0 = \frac{m.g}{K} = \frac{0,2 \times 10}{20} = 0,1\text{m} = 10\text{cm}$$

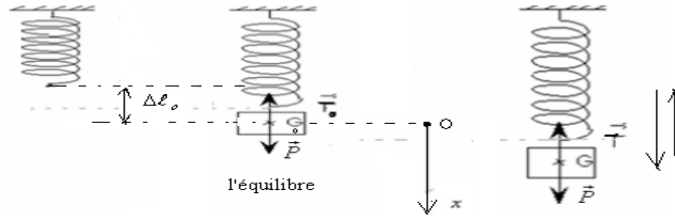
Réponse :

2) Le système étudié : {le corps S } lorsqu'il effectue des oscillations.

- Bilan des forces: pendant son mouvement le corps S est soumis à l'action des forces suivantes :

- \vec{P} : son poids.
- \vec{T} : la tension du ressort .

On considère un repère (O, \vec{i}) , son origine O est confondu avec le centre d'inertie G_0 du corps S à l'équilibre



Application de la deuxième loi de Newton: $\Sigma \vec{F}_{ext} = m.\vec{a}_G \Rightarrow \vec{P} + \vec{T} = m.\vec{a}_G$

Par projection sur l'axe ox on a: $m.g - K.\Delta\ell_0 - K.x = m.a_G$ donc : $m.g - K.(\Delta\ell_0 + x) = m.a_G \Rightarrow P - T = m.a_G$

Or d'après la condition d'équilibre : $m.g = K.\Delta\ell_0 \Rightarrow m.g - K.\Delta\ell_0 = 0$ donc: $-K.x = m.a_G$ d'où: $m.\ddot{x} + K.x = 0$

$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{K}{m}.x = 0$ C'est l'équation différentielle du mouvement.

3) La solution de l'équation différentielle : $\ddot{x} + \frac{K}{m}.x = 0$ est: $x = x_m.\cos(\omega_0.t + \varphi)$

D'après les données on a : $\omega_0 = \sqrt{\frac{m}{K}} = \sqrt{\frac{0,2}{20}} = 10\text{rad/s}$ et : $x_m = 3\text{cm}$

Et d'après les conditions initiales : à $t=0$, $x=0$ donc : et or à $t=0$ $\varphi = \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\varphi = 0 \Rightarrow 0 = x_m.\cos\varphi$

le corps passe de la position d'équilibre stable G_0 dans le sens positif $v>0$ à $t=0$.

Et on a: $x = x_m.\cos(\omega_0.t + \varphi) \Rightarrow v = \dot{x} = -x_m.\omega_0.\sin(\omega_0.t + \varphi)$ donc à $t=0$: $v = -x_m.\omega_0.\sin\varphi > 0 \Rightarrow$

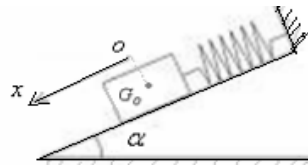
$\sin\varphi < 0$ donc $\varphi < 0$ d'où: $\varphi = -\frac{\pi}{2}$

L'équation horaire du mouvement est : $x = 3.10^{-2}.\cos(10.t - \frac{\pi}{2})$

4) La période propre du mouvement. : $T_0 = 2\pi.\sqrt{\frac{m}{K}} = 2\pi.\sqrt{\frac{0,2}{20}} \approx 0,628\text{s}$

2^{ème} Exercice : Pendule élastique incliné تم تحميل هذا الملف من موقع Talamidi.com

Un pendule élastique est placé sur un plan incliné d'un angle $\alpha = 30^\circ$ par rapport au plan horizontal. Le pendule élastique est constitué d'un ressort maintenue par un support fixe à l'une de ses extrémités alors que l'autre extrémité est liée à un corps solide de masse de masse $m=200g$. (voir schéma).



Sachant que l'allongement du ressort à l'équilibre est : $\Delta\ell_o = 8cm$

1) Déterminer l'allongement de ressort à l'équilibre.

2) On écarte le corps de sa position d'équilibre de 2cm selon la ligne de la grande pente vers le bas et on le lâche sans vitesse initiale.

a- Déterminer l'équation différentielle du mouvement.

b- Sachant que le corps passe à $t=0$ du point d'abscisse $x=+1cm$ dans le sens positif.

Déterminer l'équation horaire du mouvement. On donne : $g=10N/kg$

Réponse :

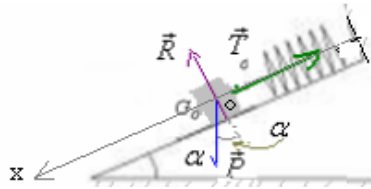
1) Système étudié { le corps solide à l'équilibre }

Bilan des forces:

\vec{P} : poids du cavalier.

\vec{R} : réaction du plan de contact elle est perpendiculaire au plan de contact car les frottements sont négligeables..

\vec{T}_o : Tension du ressort à l'équilibre



Condition d'équilibre: $\vec{P} + \vec{T}_o + \vec{R} = \vec{0}$

Par projection sur l'axe ox $P \cdot \sin \alpha - T_o + 0 = 0 \Rightarrow m \cdot g \cdot \sin \alpha - k \cdot \Delta\ell_o = 0$ donc : $\Delta\ell_o = \frac{m \cdot g \cdot \sin \alpha}{k}$

$$\text{AN: } \Delta\ell_o = \frac{0,2 \cdot \sin 30 \times 10}{20} = 0,05m = 5cm$$

2) Système étudié { le corps solide }

Bilan des forces:

\vec{P} : poids du cavalier.

\vec{R} : réaction du plan de contact elle est perpendiculaire au plan de contact car les frottements sont négligeables..

\vec{T} : tension du ressort lors du mouvement.

En appliquant la deuxième loi de Newton : $\vec{P} + \vec{T} + \vec{R} = m \cdot \vec{a}_G$

Par projection sur l'axe ox : $P - T + 0 = m \cdot a_x \Rightarrow m \cdot g - k \cdot (\Delta\ell_o + x) = m \cdot a_x \Rightarrow m \cdot g - k \cdot \Delta\ell_o - k \cdot x = m \cdot \ddot{x}$

et d'après la condition d'équilibre on a : $m \cdot g \cdot \sin \alpha - k \cdot \Delta\ell_o = 0$ donc : $-k \cdot x = m \cdot \ddot{x}$ d'où: $m \cdot \ddot{x} + \frac{k}{m} \cdot x = 0$

3) la solution de cette équation différentielle est de la forme suivante :

$$x = x_m \cdot \cos(\omega_o \cdot t + \varphi) \quad (1) \quad \text{avec :}$$

$$\omega_o = \sqrt{\frac{m}{K}} = \sqrt{\frac{0,2}{20}} = 10 \text{ rad/s} \quad \text{et :} \quad x_m = 2cm$$

Pour déterminer la valeur de φ , on utilise les conditions initiales : à $t=0$ on a $x=1cm$

$$\text{En remplaçant dans (1) on a: } 1 = 2 \cdot \cos \varphi \Rightarrow \cos \varphi = \frac{1}{2} \quad \text{d'où:} \quad \varphi = \cos^{-1} \frac{1}{2} = \pm \frac{\pi}{3}$$

Or le corps passe à $t=0$ du point d'abscisse $x=+1cm$ dans le sens positif, donc sa vitesse $v>0$ à $t=0$.

Et on a : $v = \dot{x} = -x_m \cdot \omega_o \sin(\omega_o \cdot t + \varphi)$ et à $t=0$: $v = -x_m \cdot \omega_o \sin \varphi > 0$ $\varphi = -\frac{\pi}{3}$ d'où : $\varphi < 0$ donc: $\sin \varphi < 0$

Equation horaire du mouvement:
$$x = 2 \cdot 10^{-2} \cdot \cos(10t - \frac{\pi}{3})$$