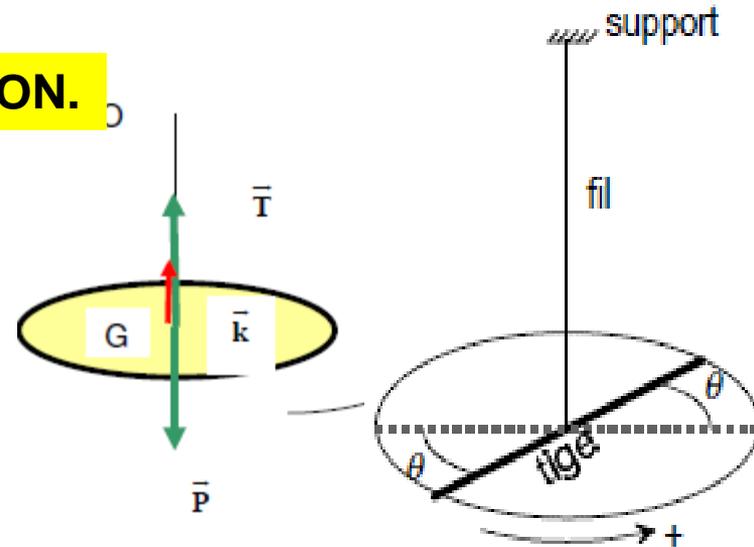


**PENDULE SIMPLE**

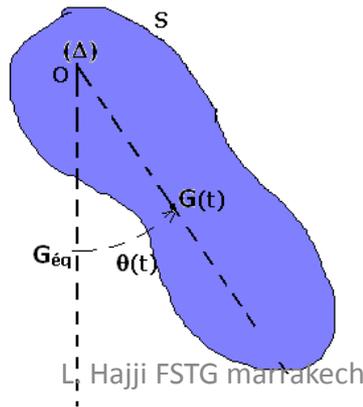
**PENDULE DE TORSION.**

Il est constitué d'un disque de masse  $m$  et de rayon  $R$  suspendu en son centre par un fil de torsion de masse négligeable. L'autre extrémité du fil est fixe.

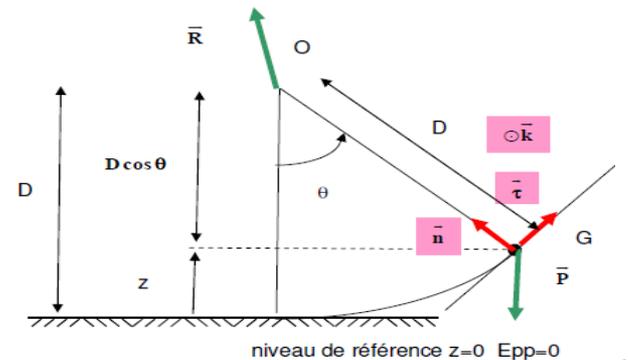


**PENDULE PESANT.**

Un pendule pesant est un solide mobile autour d'un axe  $D$  ne passant pas par son centre d'inertie



Hajji FSTG marrakech



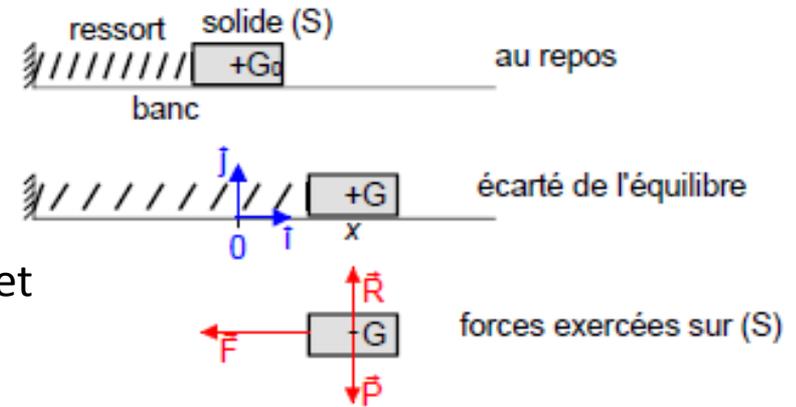
# Oscillateurs mécaniques

## ❖ Pendule élastique horizontal

### Étude dynamique

Au repos (le ressort ayant sa longueur naturelle), le solide (S) est en équilibre sous l'action de son poids et de la réaction du banc :

$$\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$$



Si l'on écarte le centre d'inertie G du solide , il se met à osciller autour de G0

Le solide (S) est soumis à trois forces :

- son poids  $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$
- la réaction du banc  $\vec{R}$
- l'action du ressort  $\vec{F} = -k \cdot x \cdot \vec{i}$

P.E.D 
$$m \cdot \vec{a}_G = \vec{F} + \vec{R} + \vec{P}$$

Par projection dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  :

- sur  $\vec{j}$  :  $R - P = 0$

- sur  $\vec{i}$  :  $m \cdot a_G = -k \cdot x$  ou  $m \cdot \ddot{x} = -k \cdot x$  avec  $\ddot{x} = \frac{d^2 x}{dt^2}$

تم تحميل هذا الملف من موقع Talamidi.com  
Par projection dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ :

- sur  $\vec{j}$  :  $R - P = 0$

- sur  $\vec{i}$  :  $m \cdot a_G = -k \cdot x$  ou  $m \cdot \ddot{x} = -k \cdot x$  avec  $\ddot{x} = \frac{d^2 x}{dt^2}$

L'équation du mouvement de G est donc une équation différentielle du second ordre :

$$m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} + k \cdot x = 0$$

$$\text{ou } m \cdot \ddot{x} + k \cdot x = 0$$

$$\text{ou } \ddot{x} + \frac{k}{m} \cdot x = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$x = x_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$$

## Conservation de l'énergie mécanique d'un oscillateur

L'énergie cinétique du système est

$$E_c = \frac{1}{2} m \cdot \dot{x}^2$$

En prenant pour état de référence la position d'équilibre ( $x = 0$ ),

l'énergie potentielle du système est

$$E_p = \frac{1}{2} k \cdot x^2$$

L'énergie mécanique du système est donnée par

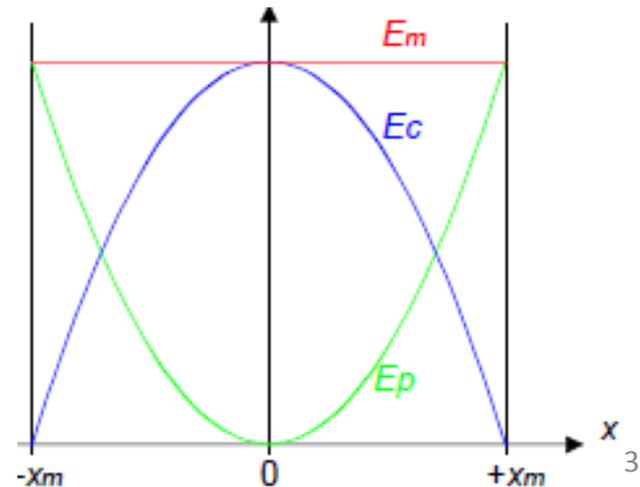
$$E_m = E_c + E_p$$

$$E_m = \frac{1}{2} k \cdot x_m^2 = \frac{1}{2} m \cdot v_m^2$$

$v_m$  vitesse maximale du solide

L. Hajji FSTG marrakech

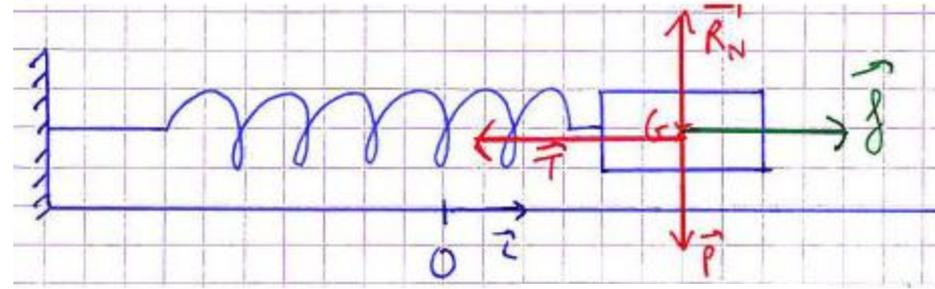
$$\dot{x} = x_m \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$$



# Oscillateur mécanique libre amorti :

Régime pseudo-périodique : **faible amortissement**

la période reste sensiblement la même que celle de l'oscillateur libre amorti, l'amortissement influe uniquement sur l'amplitude.



$$\vec{f} = -\lambda \vec{v}$$

2<sup>ème</sup> Loi de Newton :  $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m \cdot \vec{a}$

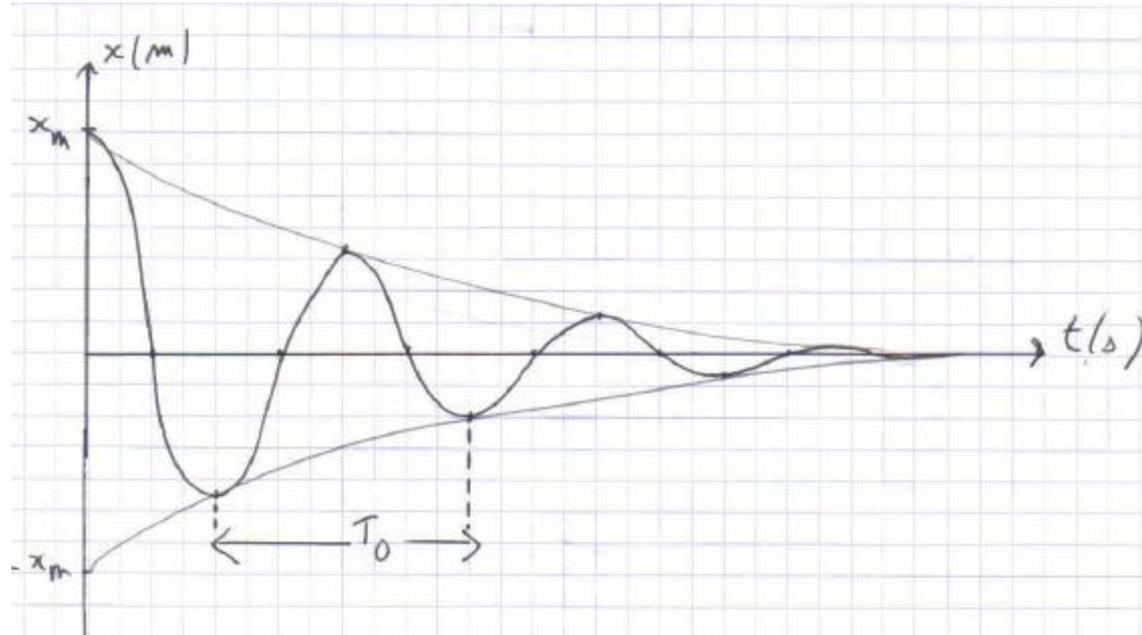
$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{R}_{\text{ex}} + \vec{f} = m \cdot \vec{a}$$

Projection sur Ox :

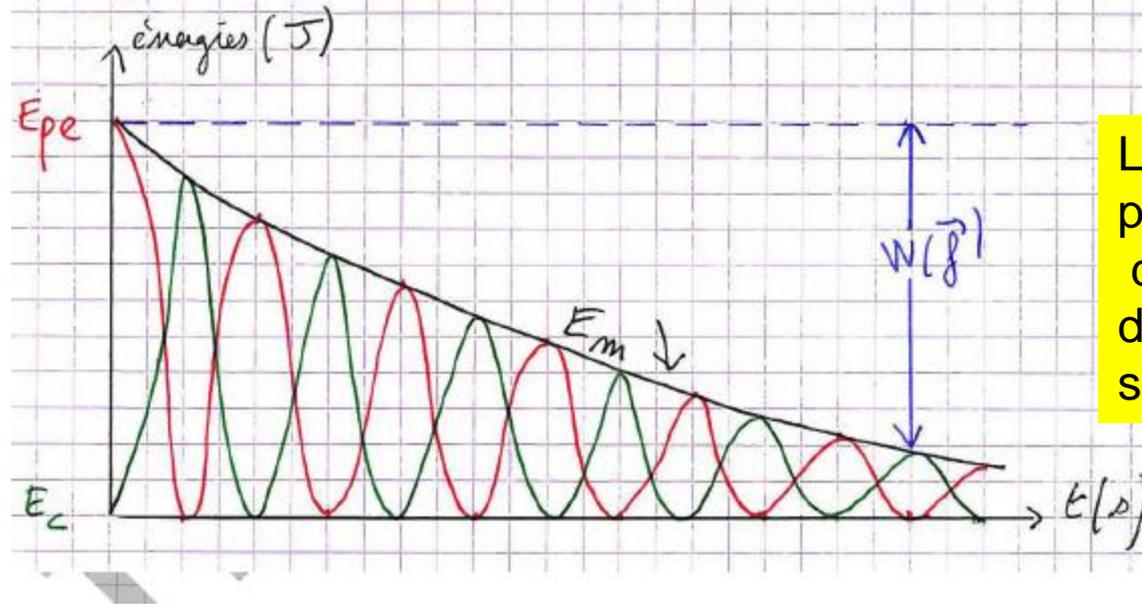
$$\ddot{x} + \frac{\lambda}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

La solution de cette équation pour un faible amortissement est

$$x(t) = x_m e^{-\frac{\lambda}{2m} t} \cos(\omega_0 t + \varphi)$$



- Aspect énergétique :



L'Énergie Mécanique n'est plus conservée au cours des oscillations, elle est dissipée par les frottements sous forme de chaleur.

## Pendule élastique de torsion

### Étude dynamique

On considère un pendule de torsion constitué d'un fil, de constante de torsion  $C$  et d'une tige fixée en son centre

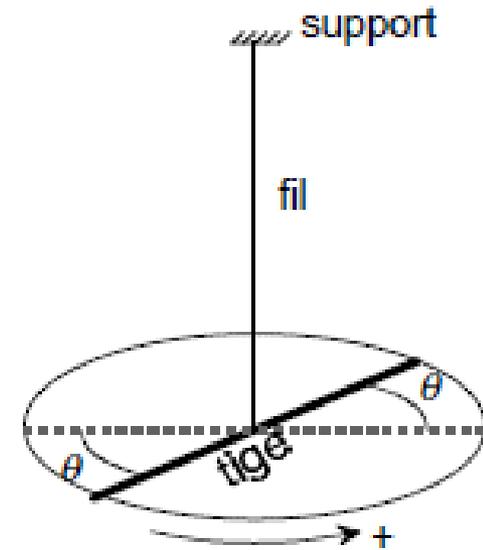
Si l'on écarte la tige de sa position d'équilibre et qu'on la libère, elle se met à osciller autour de sa position d'équilibre

La tige est soumise au seul couple de torsion du fil :  $\Gamma = -C \cdot \theta$

théorème du moment cinétique

$$J \cdot \ddot{\theta} = \Gamma = -C \cdot \theta \text{ avec } \ddot{\theta} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{C}{J}}$$



Une solution de l'équation différentielle précédente est :

$$\theta = \theta_m \cos(\omega \cdot t + \varphi)$$

## Conservation de l'énergie mécanique d'un oscillateur

L'énergie cinétique du système est

$$E_c = \frac{1}{2} J \cdot \dot{\theta}^2$$

L'énergie potentielle du système est (en prenant pour état de référence la position d'équilibre  $\theta = 0$ )

$$E_p = \frac{1}{2} C \cdot \theta^2$$

L'énergie mécanique du système est donnée par

$$E_m = E_c + E_p$$

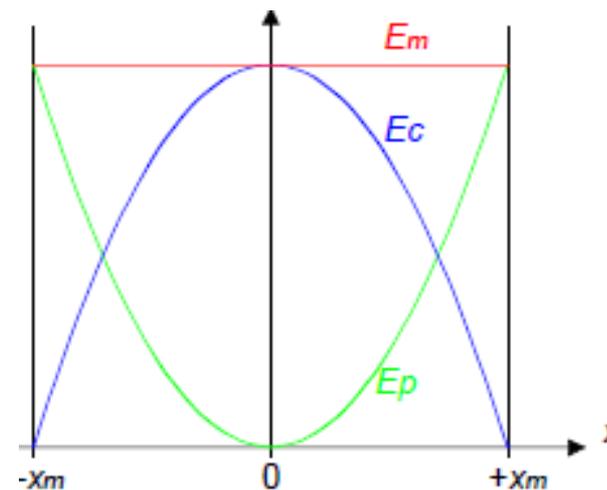
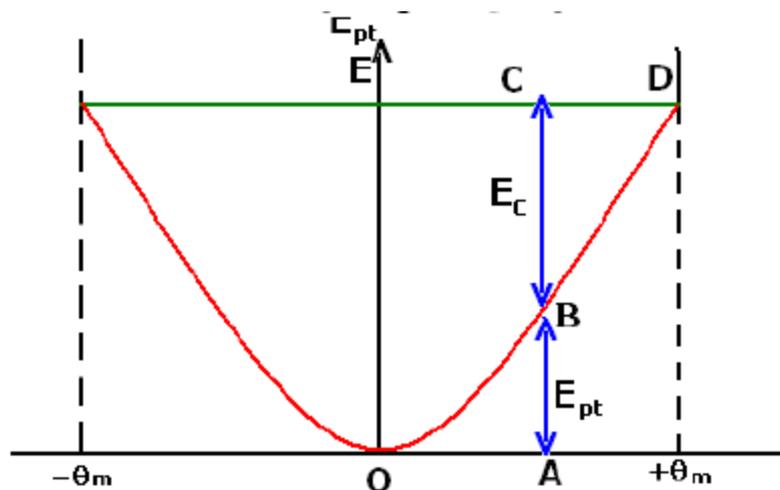
$$E_m = \frac{1}{2} J \cdot \omega^2 \theta_m^2 \sin^2(\omega \cdot t + \varphi) + \frac{1}{2} C \cdot \theta_m^2 \cos^2(\omega \cdot t + \varphi). \text{ Or } \omega^2 = \frac{C}{J} \text{ d'où :}$$

$$E_m = \frac{1}{2} C \cdot \theta_m^2 (\cos^2(\omega \cdot t + \varphi) + \sin^2(\omega \cdot t + \varphi))$$

$$E_m = \frac{1}{2} C \cdot \theta_m^2 = \frac{1}{2} J \cdot \dot{\theta}_m^2$$

Le système est **conservatif**.

· Au cours des oscillations lorsque l'énergie potentielle augmente, l'énergie cinétique diminue et réciproquement

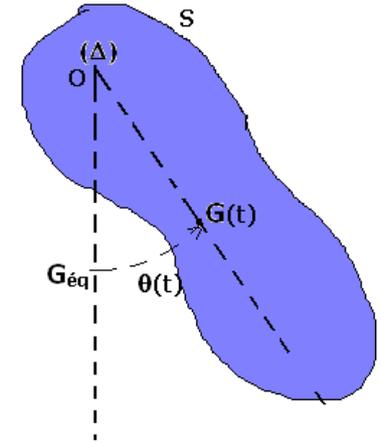


# PENDULE PESANT.

## Définition

Un pendule pesant est un solide mobile autour d'un axe D ne passant pas par son centre d'inertie.

Le pendule est mobile autour de l'axe  $\Delta$  horizontal passant par O. Il est lâché sans vitesse initiale lorsque OG fait avec la verticale l'angle  $\theta_m$ , le pendule oscille. A une date quelconque OG fait avec la verticale l'angle  $\theta$ .



## Les forces appliquées

$\vec{P}$  et  $\vec{R}$

$$\overline{M}_O(\vec{P}) + \overline{M}_O(\vec{R}) = J_{\Delta} \ddot{\theta} \vec{k}$$

$$\overline{OG} \wedge m\vec{g} + \overline{OO} \wedge \vec{R} = J_{\Delta} \ddot{\theta} \vec{k}$$

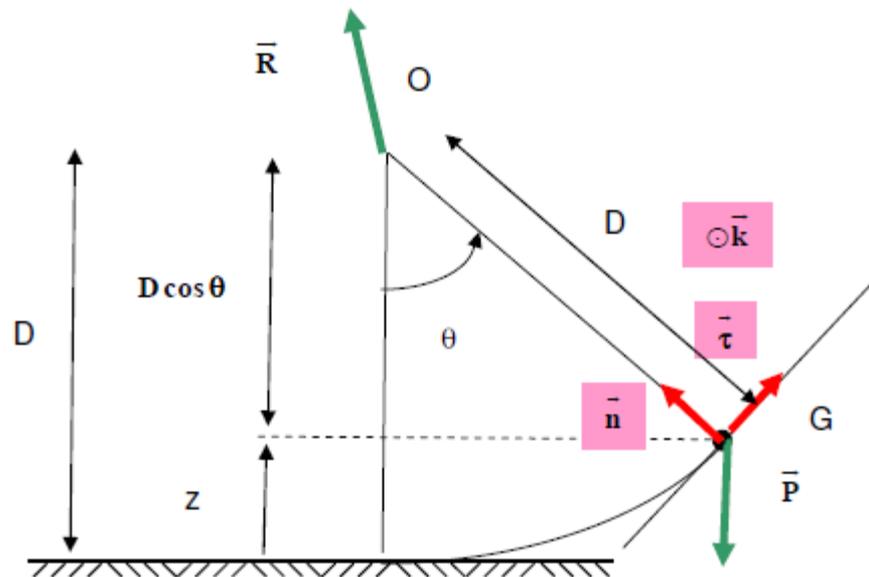
$$-D\vec{n} \wedge (-mg \cos\theta \vec{n} - mg \sin\theta \vec{\tau}) + \vec{0} = J_{\Delta} \ddot{\theta} \vec{k}$$

$$\vec{0} + Dmg \sin\theta (\vec{n} \wedge \vec{\tau}) = J_{\Delta} \ddot{\theta} \vec{k}$$

$$-Dmg \sin\theta = J_{\Delta} \ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{mgD}{J_{\Delta}} \sin\theta = 0$$

$$-Dmg \sin\theta \vec{k} = J_{\Delta} \ddot{\theta} \vec{k}$$



Pour des faibles oscillations

$$\ddot{\theta} + \frac{mgD}{J_{\Delta}} \theta = 0$$

$$\frac{mgD}{L} = \omega_0^2$$

Si à  $t=0$ ,  $\dot{\theta} = 0$  et  $\theta = \theta_m$

$$\theta = \theta_m \cos\left(\sqrt{\frac{mgD}{J_{\Delta}}} t\right)$$

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J_{\Delta}}{mgD}}$$

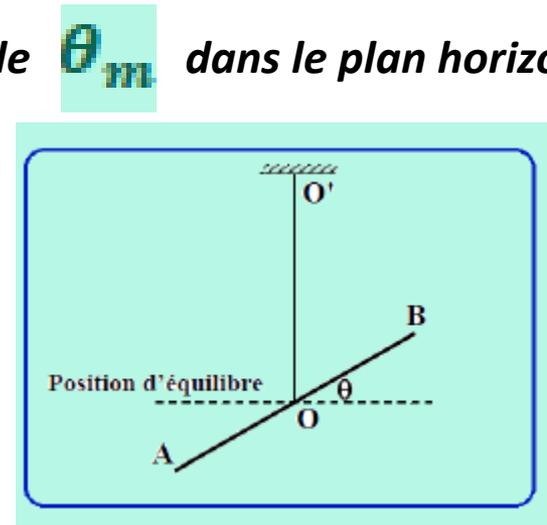
Application

**Le but de l'exercice est de déterminer le moment d'inertie d'une tige homogène par rapport à un axe qui lui est perpendiculaire en son milieu et la constante de torsion d'un fil de masse négligeable. La tige a une masse  $M$  et une longueur  $AB=l=60\text{ cm}$**

**La tige est écartée de sa position d'équilibre d'un angle faible  $\theta_m$  dans le plan horizontal ; elle est lâchée sans vitesse à l'instant  $t_0=0$ .**

**1) Donner, à l'instant  $t$ , l'expression de l'énergie mécanique  $E_m$  du système**

En choisissant le niveau de référence pour l'énergie potentielle de pesanteur  $E_{pp}$  le niveau horizontal passant par le point  $O$ , nous aurons  $E_{pp} = 0$



$$E_{pe} = \frac{1}{2} C \theta^2$$

$$E_c = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2$$

- L'énergie potentielle élastique emmagasinée dans le fil de torsion
- L'énergie cinétique du pendule de torsion, en rotation autour de l'axe a pour expression :

$$E_m = E_c + E_{pp} + E_{pe} = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} C \theta^2$$

**a) Écrire l'expression de  $E_m$  quand  $\theta = \theta_m$ .**

Lorsque la pendule s'écarte à sa position maximale  $\theta_m$  sa vitesse angulaire est nulle. Ainsi l'énergie mécanique aura pour expression

$$E_m = \frac{1}{2} C \theta_m^2$$

**Déterminer l'expression de la vitesse angulaire de [P] lors du passage par la position d'équilibre.**

À cette position l'énergie potentielle élastique est nulle

$$E_m = \frac{1}{2} I \dot{\theta}_{max}^2$$

Pas de frottement donc conservation de l'énergie mécanique

$$\frac{1}{2} C \theta_m^2 = \frac{1}{2} I \dot{\theta}_{max}^2 \Leftrightarrow \dot{\theta}_{max}^2 = \frac{C}{I} \theta_m^2$$

$$\dot{\theta}_{max} = \pm \sqrt{\frac{C}{I}} \theta_m$$

**Établir l'équation différentielle qui régit le mouvement de**

$$E_m = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} C \theta^2 = \text{Constante}$$

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 = \frac{1}{2} \times 2I\dot{\theta}\ddot{\theta} + \frac{1}{2} C \times 2 \times \theta\dot{\theta}$$



$$\ddot{\theta} + \frac{C}{I} \theta = 0$$

$$\theta = \theta_m \cos(\omega_1 t + \varphi)$$

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{C}}$$

1) A l'aide d'un chronomètre, on mesure la durée  $t_1$  de 20 oscillations et on obtient  $t_1 = 20$  s. Déterminer la relation entre  $I$  et  $C$ .

$$T_1 = 1 \text{ s} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{C}} \Rightarrow \sqrt{\frac{I}{C}} = \frac{1}{2\pi}$$

$$C = 40 \times I$$