Applications directes

Étudier la chute libre
(§ 1 du cours)

3. Étudier une chute libre sans vitesse initiale

Un solide de masse m, de centre d'inertie G, est lâché sans vitesse initiale au voisinage de la Terre.
Dans les premiers mètres de chute, l'action exercée par l'air est négligeable devant le poids du solide.

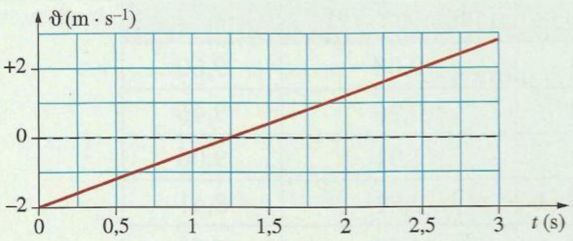
1. Faire l'inventaire des forces extérieures appliquées au solide.

2. À l'aide de la deuxième loi de NEWTON, donner les caractéristiques de l'accélération du centre d'inertie G du solide.

3. En utilisant un axe vertical (Oz) orienté vers le bas, établir l'équation différentielle traduisant l'évolution de la vitesse du centre d'inertie du solide.

4. Interpréter l'évolution de la vitesse

En exploitant un film réalisé lors d'une mission Apollo, on a enregistré le mouvement vertical du centre d'inertie G d'un solide en chute libre sur la Lune. On repère l'évolution de la vitesse ϑ de G au cours du temps suivant un axe vertical orienté vers le bas. L'exploitation de cet enregistrement conduit au graphique ci-dessous. La date $t = 0$ correspond au début de l'enregistrement.



1. Quelle est la valeur de l'accélération de G lors du mouvement?

2. Quelle est la valeur de la vitesse initiale?

3. Dans quel sens le mobile a-t-il été lancé?

4. Le solide est lancé d'un point dont l'abscisse a pour valeur $z_0 = 0{,}5$ m.

a. Établir l'expression de la vitesse de G en fonction du temps avec les valeurs numériques précédemment déterminées.

b. Établir ensuite l'expression de l'abscisse z en fonction du temps t.

5. Étudier une chute libre avec vitesse initiale

On étudie le mouvement du centre d'inertie G d'un mobile en chute libre lancé avec une vitesse initiale $\vec{\vartheta}_0$ verticale de valeur $\vartheta_0 = 3$ m . s^{-1}.

1. Faire l'inventaire des forces qui s'exercent sur le mobile.

2. En déduire l'accélération de son centre d'inertie G sachant que $g = 9{,}8$ m . s^{-2}.

3. En choisissant un axe (Oz) vertical orienté vers le bas, établir les équations horaires de la vitesse et de la position du centre d'inertie de ce solide dans les conditions initiales suivantes :

a. $z_0 = 0$ et $\vec{\vartheta}_0$ est orienté vers le haut;

b. $z_0 = 5$ m et $\vec{\vartheta}_0$ est orienté vers le bas.

6. Étudier un mouvement vertical
(voir l'exercice résolu 1)

Un élève de Terminale veut étudier le mouvement de la fléchette d'un pistolet.
D'une altitude de 1,75 m, il lance la fléchette verticalement vers le haut avec une vitesse initiale de 5,0 m . s^{-1}. On considère l'action de l'air négligeable.

1. Déterminer les caractéristiques de l'accélération $\vec{a}_G$ du centre d'inertie G de la fléchette.

2. On choisit un axe (Oz) vertical orienté vers le haut dont l'origine O est située au niveau du sol. Établir les expressions de la vitesse $\vartheta(t)$ et de l'abscisse $z(t)$ du centre de gravité de la fléchette.

3. a. Quelle est la valeur de la vitesse au sommet de la trajectoire?

b. En déduire la date t_s à laquelle la fléchette atteint le sommet de sa trajectoire.

c. Quelle est la hauteur h_s atteinte par la fléchette?

4. À quelle date la fléchette touchera-t-elle le sol?

Étudier la chute d'un solide dans un fluide
(§2 du cours)

7. Calculer la poussée d'ARCHIMÈDE

La bille d'un roulement a un volume $V = 4{,}4 \times 10^{-6}$ m^3 et une masse $m = 34$ g. L'intensité de la pesanteur est $g = 10$ m . s^{-2}.

1. Calculer le poids de cette bille.

2. La bille est placée dans l'air dont la masse volumique est :

$$\rho_{air} = 1{,}3 \text{ kg . m}^{-3}.$$

a. Calculer la poussée d'ARCHIMÈDE qui s'exerce sur la bille.

b. Comparer la poussée d'ARCHIMÈDE et le poids.

3. La bille tombe dans un liquide dont la masse volumique est $\rho_{liq} = 0{,}89 \times 10^3$ kg . m^{-3}.

a. Calculer la poussée d'ARCHIMÈDE qui s'exerce sur la bille.

b. Comparer la poussée d'ARCHIMÈDE et le poids.

8. Calculer une viscosité

Lorsque la vitesse est faible, un objet sphérique de rayon R se déplaçant dans un fluide est soumis à une force de frottement fluide $\vec{f}$ dont la valeur peut être calculée par la formule de STOKES : $f = 6\,\pi\,.\,\eta\,.\,R\,.\,\vartheta$. Dans cette expression, η est la viscosité du fluide.

1. Déterminer, dans le système international, l'unité de viscosité.

2. Exprimer le vecteur force de frottement $\vec{f}$ en fonction du vecteur vitesse $\vec{\vartheta}$.

3. Une bille de rayon $R = 1{,}0$ cm chute dans un fluide avec une vitesse $\vartheta = 1{,}4$ cm . s^{-1}. L'étude du mouvement montre que la force de frottement exercée par le fluide a une intensité $f = 2{,}2 \times 10^{-3}$ N. Calculer la viscosité η de ce fluide.

Utilisation des acquis

10. Chute verticale et solution de l'équation différentielle

Une goutte d'eau colorée, assimilée à une sphère de rayon $r = 2$ mm, chute dans l'huile contenue dans une éprouvette. La masse volumique de l'eau est $\rho_e = 1{,}0 \times 10^3$ kg . m^{-3}, celle de l'huile est : $\rho_h = 8{,}2 \times 10^2$ kg . m^{-3}.
On note ϑ la vitesse de la goutte d'eau. La valeur f de la force de frottement fluide exercée par l'huile est donnée par la formule de STOKES : $f = 6\,\pi\,.\,\eta\,.\,r\,.\,\vartheta$. Le coefficient η est la viscosité du fluide. Pour l'huile utilisée, on a $\eta = 80 \times 10^{-3}$ kg . m^{-1} . s^{-1}. L'intensité de la pesanteur est $g = 9{,}81$ m . s^{-2}. On rappelle que le volume d'une sphère de rayon r est $V = \frac{4}{3}\,\pi\,.\,r^3$.

1. Effectuer l'inventaire des forces exercées sur la goutte. Donner leurs expressions littérales.

2. Établir l'équation différentielle traduisant la vitesse de la goutte suivant un axe (Oz) vertical orienté vers le bas.

3. Montrer que cette équation différentielle peut s'écrire : $\frac{d\vartheta}{dt} = A - B\,.\,\vartheta$. Calculer A et B.

4. Montrer que la goutte atteint une vitesse limite. L'exprimer en fonction de A et B, et calculer sa valeur.

13. La chute d'un grêlon

Un grêlon de volume V tombe verticalement dans l'air. Les frottements de l'air peuvent être assimilés à une force $\vec{f}$ dont l'intensité f est proportionnelle au carré de la vitesse : $f = k\,.\,\vartheta^2$.
On note ρ_g la masse volumique du grêlon et ρ_a la masse volumique de l'air.

1. Quelle est, dans le système international, l'unité du coefficient k?

2. Faire l'inventaire des forces exercées sur le grêlon.

3. a. Établir l'expression vectorielle de l'accélération du grêlon.

b. Établir l'équation différentielle donnant la vitesse, suivant un axe (Oz) vertical orienté vers le bas.

4. a. Montrer que le grêlon atteint une vitesse limite de chute, notée ϑ_ℓ. L'exprimer en fonction des données du texte.

b. Calculer la valeur du coefficient k.

Données : $V = 1{,}1 \times 10^{-7}$ m^3 ; $\rho_g = 0{,}92$ g . mL^{-1} ; $\rho_a = 1{,}3$ g . L^{-1} ; $\vartheta_\ell = 11{,}6$ m . s^{-1} ; g = 9,8 m . s^{-2}.

14. Un bon C_x

La force exercée par l'air sur un véhicule qui se déplace dépend de sa forme, de sa « surface frontale » S, et de sa vitesse ϑ. On définit un coefficient de pénétration dans l'air, noté C_x, qui dépend de la forme : plus la forme est aérodynamique, plus ce coefficient est faible. Le coefficient de pénétration dans l'air C_x est, par exemple, de l'ordre de 0,6 pour un camion, de 0,3 pour une berline actuelle, et de 0,2 pour les prototypes à l'étude.

Les ingénieurs calculent la résistance de l'air ou « traînée » par la formule $F_x = \frac{1}{2} . \rho . S . C_x . \vartheta^2$.

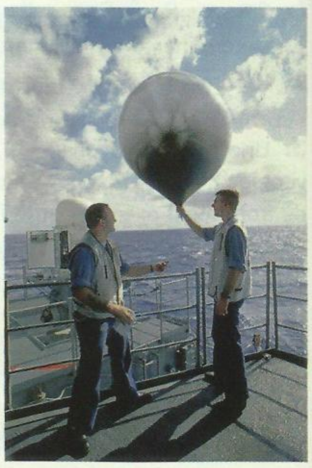
Donnée : masse volumique de l'air : $\rho = 1{,}3$ kg . m^{-3}.

1. Comparer la traînée pour un camion ($C_x = 0{,}50$) de surface frontale $S = 6{,}0$ m^2 avec la traînée pour une berline ($C_x = 0{,}3$) de surface frontale $S = 2{,}0$ m^2, ces véhicules roulant à 90 km . h^{-1}.

2. a. Calculer la traînée sur une même berline ($C_x = 0{,}3$ et $S = 2{,}0$ m^2) roulant à 90 km . h^{-1}, puis à 130 km . h^{-1}.

b. Comparer ces valeurs et conclure quant à la consommation de carburant.

15. Le mouvement d'un ballon-sonde



Un ballon-sonde est un dispositif utilisé pour étudier l'atmosphère terrestre. Il est constitué d'un ballon, gonflé à l'hélium, et d'une nacelle qui emporte du matériel d'analyse de l'air.

En montant, le ballon grossit, car la pression atmosphérique diminue. Sa paroi élastique finit par éclater à une altitude généralement comprise entre 20 et 30 kilomètres. Après l'éclatement, un petit parachute s'ouvre pour ramener la nacelle et son matériel scientifique au sol. Il faut ensuite localiser la nacelle, puis la récupérer pour exploiter l'ensemble des expériences embarquées.

On étudie ici la mécanique du vol du ballon-sonde à faible altitude (sur les premières centaines de mètres). On peut alors considérer que l'accélération de la pesanteur g, le volume du ballon V_b et la masse volumique ρ de l'air restent constants.

On modélisera la valeur f de la force de frottement de l'air sur le système étudié par l'expression : $f = C . \rho . \vartheta^2$ où C est une constante pour les altitudes considérées et ϑ la vitesse du centre d'inertie du système {ballon + nacelle}.

On supposera qu'il n y a pas de vent (le mouvement s'effectue dans la direction verticale) et que le volume de la nacelle est négligeable par rapport au volume du ballon.

Le système {ballon + nacelle} est étudié dans un référentiel terrestre considéré comme galiléen.

1. a. Établir le bilan des forces exercées sur le système {ballon + nacelle}, lorsque le ballon vient juste de décoller. Indiquer le sens et la direction de chaque force.

b. Donner l'expression littérale de la valeur F_A de la poussée d'Archimède.

c. Soit M la masse du système. Appliquer au système la deuxième loi de Newton (seule la relation vectorielle est demandée).

d. La vitesse initiale du ballon (juste après le décollage) étant considérée comme nulle, quelle condition doit satisfaire le vecteur accélération pour que le ballon puisse s'élever? En déduire une condition sur M (on projettera la relation obtenue à la question **1. c.** sur un axe vertical orienté vers le haut).

e. En déduire la masse maximale de matériel scientifique que l'on peut embarquer dans la nacelle.

Données : $\rho = 1{,}22$ kg . m^{-3} ; $V_b = 9{,}0$ m^3.

Masse du ballon (enveloppe + hélium) : $m = 2{,}10$ kg.

Masse de la nacelle vide : $m' = 0{,}50$ kg.

2. a. À partir de la question **1. c.** et en conservant l'axe défini à la question **1. d.**, montrer que l'équation différentielle régissant le mouvement du ballon peut se mettre sous la forme :

$$A . \vartheta^2 + B = \frac{d\vartheta}{dt}$$

et donner les expressions de A et B.

La masse de matériel embarqué étant de 2,0 kg, l'application numérique donne $A = -0{,}53$ m^{-1} et $B = 13{,}6$ m . s^{-2}.

b. Donner l'expression littérale de la vitesse limite ϑ_ℓ du ballon en fonction de A et B.

c. Calculer cette vitesse limite.

D'après bac, juin 2004.

19. Balle de ping-pong lancée dans l'air

Une balle de ping-pong a une masse $m = 2{,}3$ g et un rayon $r = 1{,}9$ cm. On étudie son mouvement vertical dans l'air de masse volumique $\rho_{air} = 1{,}3$ kg . m^{-3}. Elle est alors soumise à des frottements qui peuvent être modélisés par une force dont l'intensité f est proportionnelle au carré de la vitesse $f = k . \vartheta^2$. L'intensité de la pesanteur est g = 9,81 m . s^{-2}.

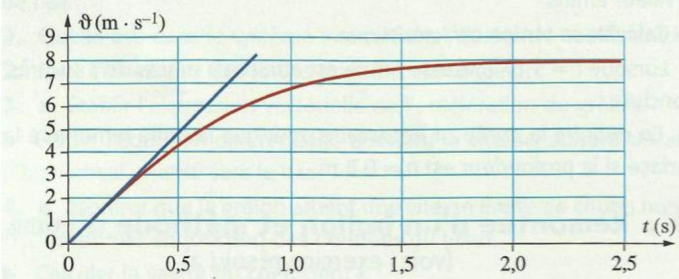
1. a. Faire l'inventaire des forces exercées sur la balle. Donner les expressions littérales des intensités de ces forces.

b. En utilisant un axe vertical orienté vers le bas, établir l'équation différentielle du mouvement du centre de gravité de la balle.

c. Montrer que cette équation différentielle peut s'écrire : $\frac{d\vartheta}{dt} + A . \vartheta^2 = B$. Donner les expressions littérales de A et B. Calculer B.

d. Montrer que, si la balle est abandonnée sans vitesse initiale, elle atteint une vitesse limite. L'exprimer en fonction de A et B.

2. Lors d'une chute, on a obtenu le graphique ci-dessous.



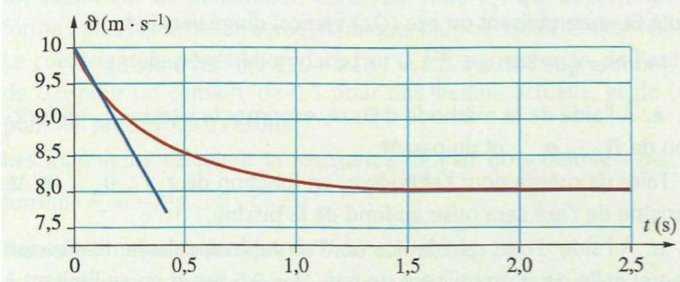
a. Quelle est la vitesse initiale ϑ_0 de la balle?

b. Quelle est la vitesse limite ϑ_ℓ atteinte par la balle?

En déduire la valeur de A, puis celle de k.

c. Quelle est l'accélération initiale de la balle? Ce résultat est-il en accord avec l'équation différentielle?

3. Lors d'une autre étude expérimentale, on a obtenu le graphique suivant.



a. Quelle est la vitesse initiale ϑ_0 de la balle?

b. Quelle est la vitesse limite ϑ_ℓ atteinte par la balle? La comparer avec celle obtenue précédemment. La vitesse initiale a-t-elle une influence sur la vitesse limite?

c. Quelle est l'accélération initiale a_0 de la balle? La comparer avec celle obtenue à partir de l'équation différentielle. La vitesse initiale a-t-elle une influence sur l'accélération initiale?

d. À l'aide du graphique, justifier le signe de l'accélération initiale.