

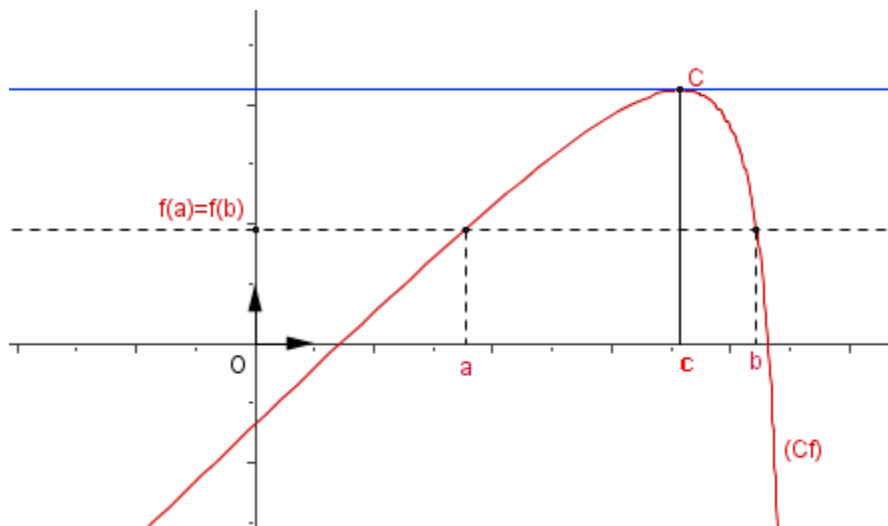
مبرهنة التزايدات المنتهية

I

1- مبرهنة رول

تذكير: اذا كان لدالة f مطراف نسبي في c و كانت f قابلة للاشتقاق في c فان $f'(c) = 0$

لتكن f دالة متصلة على $[a; b]$ و قابلة للاشتقاق على $]a; b[$ بحيث $f(a) = f(b)$



الشكل جانبه يؤول هندسيا هذه الشروط:

يظهر من خلال الشكل عن وجود نقطة C من المنحنى (C_f) أفصولها ينتمي الى $]a; b[$ بحيث المماس

ل (C_f) في C يوازي محور الافاصل أي يوجد c من $]a; b[$ بحيث $f'(c) = 0$

لنبرهن هذا

*- إذا كانت f ثابتة فان $f'(c) = 0 \quad \forall c \in]a; b[$

*- f دالة غير ثابتة ومنه يوجد $x_0 \in]a; b[$ حيث $f(x_0) > f(a) = f(b)$ أو $f(x_0) < f(a) = f(b)$

بما أن f متصلة على $[a; b]$ فان f تقبل قيمة قصوى $M = \text{Sup}_{x \in [a, b]} f(x)$ و قيمة دنيا $m = \text{Inf}_{x \in [a, b]} f(x)$

لدينا $M \neq f(a) = f(b)$ أو $m \neq f(a) = f(b)$ لأن إذا كان غير ذلك فان f ستكون ثابتة

إذا كان $M \neq f(a) = f(b)$ فانه يوجد c من $]a; b[$ حيث $f(c) = M$ أي أن f تقبل قيمة قصوى عند c

و حيث f قابلة للاشتقاق في c فان $f'(c) = 0$

إذا كان $m \neq f(a) = f(b)$ فانه يوجد c من $]a; b[$ حيث $f(c) = m$ أي أن f تقبل قيمة دنيا عند c

و حيث f قابلة للاشتقاق في c فان $f'(c) = 0$

مبرهنة رول

إذا كانت دالة f معرفة على المجال $[a; b]$ تحقق الشروط التالية:

1- f متصلة على $[a; b]$

2- f قابلة للاشتقاق على $]a; b[$

3- $f(a) = f(b)$

فانه يوجد عنصر c من $]a; b[$ حيث $f'(c) = 0$

❖ وجود c من $]a; b[$ حيث $f'(c) = 0$ لا يستثني وجود نقط أخرى k حيث $f'(k) = 0$

❖ لنطبق مبرهنة رول الشروط الثلاث ضرورية

❖ معطيات مبرهنة رول شروط كافية، لكنها غير لازمة

2- مبرهنة التزايد المتناهية

لتكن f دالة متصلة على $]a; b[$
و قابلة للاشتقاق على $]a; b[$

الشكل جانبه يؤول هندسيا الشرطين:
يظهر من خلال الشكل عن وجود نقطة C
من المنحنى (C_f) أفصولها ينتمي الى $]a; b[$
بحيث المماس لـ (C_f) في C يوازي (AB)
أي أن معامليهما الموجهين متساويين
يوجد c من $]a; b[$ بحيث $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

لنبرهن هذا

$$\text{نعتبر } g(x) = f(x) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) + f(a) \right]$$

لدينا إذن g دالة متصلة على $]a; b[$ و قابلة للاشتقاق على $]a; b[$

$$\text{لدينا } g(a) = g(b) = 0$$

إذن حسب مبرهنة رول يوجد عنصر c من $]a; b[$ حيث $g'(c) = 0$

$$\forall x \in]a; b[\quad g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$\text{ومنه } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

إذا كانت دالة f معرفة على المجال $]a; b[$ تحقق الشرطين التاليين:

1- f متصلة على $]a; b[$

2- f قابلة للاشتقاق على $]a; b[$

فانه يوجد عنصر c من $]a; b[$ حيث $(b - a)f'(c) = f(b) - f(a)$

ملاحظات

وجود c من $]a; b[$ حيث $(b - a)f'(c) = f(b) - f(a)$ لا يستثني وجود نقط أخرى k

حيث $(b - a)f'(k) = f(b) - f(a)$

تمرين

$$-1 \quad \text{بين أن } \forall (x; y) \in \mathbb{R}^2 \quad |\sin x - \sin y| \leq |x - y|$$

$$-2 \quad \text{استنتج أن } \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad |\sin x| \leq x$$

لتكن f و g دالتين معرفتين على المجال $I = [x_0; +\infty[$ و قابلتين للاشتقاق على I

حيث $f(x_0) = g(x_0)$ و $f'(x) \geq g'(x)$ لكل x من I نعتبر $h = f - g$ على I

بتطبيق مبرهنة التزايد المتصاعدة على h في المجال $[x_0; x]$ حيث $x \in I$ بين أن $f(x) \geq g(x)$ لكل x من I

الجواب

لدينا g متصلة على $[x_0; x]$ و قابلة للاشتقاق على $]x_0; x[$ لكل x من I

ومنه يوجد عنصر c من $]x_0; x[$ حيث $(x - x_0)h'(c) = h(x) - h(x_0)$ أي $(x - x_0)h'(c) = h(x)$

و بما أن $h'(c) = f'(c) - g'(c)$ و $f'(x) \geq g'(x)$ لكل x من I فإن $h'(c) \geq 0$ أي $(x - x_0)h'(c) \geq 0$

ومنه $h(x) \geq 0$ لكل x من I

اذن $f(x) \geq g(x)$ لكل x من I

لتكن f و g دالتين معرفتين على المجال $I = [x_0; +\infty[$ و قابلتين للاشتقاق على I

إذا كان $f(x_0) = g(x_0)$ و $f'(x) \geq g'(x)$ لكل x من I فإن $f(x) \geq g(x)$ لكل x من I

ملاحظة: يمكن تعويض المجال I بـ $]-\infty; x_0]$ أو $[x_0; a]$ أو $]a; x_0]$ أو $[x_0; a[$ و الخاصية تبقى صالحة

تمرين

$$1- \text{بين أن } \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad x - \frac{x^3}{3} \leq \arctan x$$

$$2- \text{بين أن } \forall x \in \mathbb{R} \quad 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}$$

تمرين

$$u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$$

بين أن $(u_n)_{n \geq 1}$ متقاربة.