تمارين: مبرهنة التزايدات المنتهية

الثانية سلك بكالوريا علوم رياضية

تمارين محلولة

التمرين1

نعتبر المتتالية (u_n) بحيث $u_0=\frac{1}{2}$; $u_{n+1}=g(u_n)$ $\forall n\in\mathbb{N}$

حيث $\forall x\in[0;+\infty[$ $g(x)=\arctan\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)$

1- بين أن المعادلة $g(x)=x$ تقبل حلا وحيدا α في $]0;1[$

2- بين أن $\forall n\in\mathbb{N}$ $|u_{n+1}-\alpha|\prec\frac{4}{5}|u_n-\alpha|$

3- استنتج أن (u_n) متقاربة محددا نهايتها

الحل

1- نبين أن المعادلة $g(x)=x$ تقبل حلا وحيدا α في $]0;1[$

نعتبر $h(x)=g(x)-x$ على $[0;1]$ لدينا h متصلة على $[0;1]$

لدينا $h'(x)=\frac{-1}{2(x^2+1)}-1$ ومنه h تناقصية قطعا على $[0;1]$

لدينا $h(0)\times h(1)=\frac{\pi}{4}\left(\arctan\left(\sqrt{2}-1\right)-1\right)$

$0\prec\sqrt{2}-1\prec\tan\frac{\pi}{4}\prec\tan 1$ (لأن $\frac{\pi}{4}\prec 1$, $\sqrt{2}-1\prec 1$) ومنه $0\prec\arctan\left(\sqrt{2}-1\right)\prec 1$

إذن $h(0)\times h(1)\prec 0$

إذن المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $]0;1[$

أي أن المعادلة $g(x)=x$ تقبل حلا وحيدا α في $]0;1[$

2- نبين أن $\forall n\in\mathbb{N}$ $|u_{n+1}-\alpha|\prec\frac{4}{5}|u_n-\alpha|$

لدينا $g(x)\in]0;1[$ $\forall x\in[0;+\infty[$

و حيث $u_0=\frac{1}{2}$; $u_{n+1}=g(u_n)$ $\forall n\in\mathbb{N}$ فان $0\prec u_n\prec 1$ $\forall n\in\mathbb{N}$ (نبين ذلك بالترجع)

الدالة g متصلة في مجال مغلق طرفاه α و u_n وقابلة للاشتقاق في مجال مفتوح طرفاه α و u_n

ومنه يوجد c محصور قطعا بين α و u_n حيث $g(u_n)-g(\alpha)=g'(c)(u_n-\alpha)$

أي أن $u_{n+1}-\alpha=\frac{-1}{2(1+c^2)}(u_n-\alpha)$ ومنه $|u_{n+1}-\alpha|=\frac{1}{2(1+c^2)}|(u_n-\alpha)|$

و حيث أن $0\prec c\prec 1$ فان $\frac{1}{4}\prec\frac{1}{2(1+c^2)}\prec\frac{1}{2}\prec\frac{4}{5}$ ومنه $|u_{n+1}-\alpha|\prec\frac{4}{5}|u_n-\alpha|$ $\forall n\in\mathbb{N}$

3- نستنتج أن (u_n) متقاربة محددا نهايتها

لدينا $|u_{n+1}-\alpha|\prec\frac{4}{5}|u_n-\alpha|$ $\forall n\in\mathbb{N}$

$$|u_1-\alpha| \prec \frac{4}{5}|u_0-\alpha|$$

$$|u_2-\alpha| \prec \frac{4}{5}|u_1-\alpha|$$

$$\begin{matrix} . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \end{matrix}$$

$$|u_n-\alpha| \prec \frac{4}{5}|u_{n-1}-\alpha|$$

بضرب أطراف المتفاوتات و الاختزال نحصل على $|u_n-\alpha| \prec \left(\frac{4}{5}\right)^n |u_0-\alpha|$

وحيث $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n |u_0-\alpha| = 0$ فان (u_n) متقاربة و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$

التمرين2

لتكن f دالة عددية معرفة على $[0;1]$ بما يلي $f(x)=\frac{1}{4}\tan\frac{1}{x+1}$

1- بين أن f قابلة للاشتقاق على $[0;1]$ و أن $|f'(x)| \le \frac{1}{4\cos^2 1} \quad \forall x\in[0;1]$

2- بين أن $f([0;1]) \subset [0;1]$

3- أ- بين أنه : $f(\alpha)=\alpha \quad \exists!\alpha\in\,]0;1[$

ب- استنتج أن $|f(x)-\alpha| \le \frac{1}{4\cos^2 1}|x-\alpha| \quad \forall x\in\,]0;1[-\{\alpha\}$

4- نعتبر المتتالية العددية المعرفة كما يلي : $\begin{cases} u_0 \in\,]0;1[-\{\alpha\} \\ u_{n+1}=\frac{1}{4}\tan\left(\frac{1}{u_n+1}\right) \end{cases}$

أ- بين أن $|u_n-\alpha| \le \left(\frac{1}{4\cos^2 1}\right)^n |u_0-\alpha| \quad \forall n\in\mathbb{N}$

ب- استنتج أن (u_n) متقاربة و حدد نهايتها.

الحل

f دالة عددية معرفة على $[0;1]$ بما يلي $f(x)=\frac{1}{4}\tan\frac{1}{x+1}$

4- نبين أن f قابلة للاشتقاق على $[0;1]$ و أن $|f'(x)| \le \frac{1}{4\cos^2 1} \quad \forall x\in[0;1]$

$x \to \frac{1}{x+1}$ قابلة للاشتقاق على $[0;1]$ و $/ k\in\mathbb{Z} \quad \frac{1}{x+1} \ne \frac{\pi}{2}+k\pi \quad \forall x\in[0;1]$

إذن f قابلة للاشتقاق على $[0;1]$

و $\forall x\in[0;1] \quad f'(x)=\frac{1}{4}\left(\frac{-1}{(x+1)^2}\right)\left[1+\tan^2\frac{1}{x+1}\right]=\frac{1}{4}\left(\frac{-1}{(x+1)^2}\right)\left[\frac{1}{\cos^2\left(\frac{1}{x+1}\right)}\right]$

$$\forall x\in[0;1] \quad |f'(x)|=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right)\left[\frac{1}{\cos^2\left(\frac{1}{x+1}\right)}\right]$$

الدالتان $x\to\cos x$ و $x\to\frac{1}{(x+1)^2}$ تناقصيتان على $[0;1]$ و $\forall x\in[0;1] \quad \frac{1}{2}\le\frac{1}{x+1}\le 1$

ومنه $\frac{1}{\cos^2 1}\le\frac{1}{\cos^2\frac{1}{x+1}}\le 1$; $\forall x\in[0;1] \quad \frac{1}{4}\le\frac{1}{(x+1)^2}\le 1$

إذن $\forall x\in[0;1] \quad |f'(x)|\le\frac{1}{4\cos^2 1}$

5- نبين أن $f([0;1])\subset[0;1]$

$\forall x\in[0;1] \quad f'(x)=\frac{1}{4}\left(\frac{-1}{(x+1)^2}\right)\left[\frac{1}{\cos^2\left(\frac{1}{x+1}\right)}\right]$ و منه $\forall x\in[0;1] \quad f'(x)\le 0$

إذن f تناقصية على $[0;1]$ ومنه $f([0;1])=\left[\frac{1}{4}\tan\frac{1}{2};\frac{1}{4}\tan 1\right]\subset[0;1]$

6- أ- نبين أنه : $\exists!\alpha\in]0;1[\quad f(\alpha)=\alpha$

نعتبر الدالة g المعرفة على $[0;1]$ بـ $g(x)=f(x)-x \quad \forall x\in[0;1]$

g متصلة على $[0;1]$

$g(0)=\frac{1}{4}\tan(1)\ge 0$ و $g(1)=-1+\frac{1}{4}\tan\frac{1}{2}\le 0$

إذن $\exists!\alpha\in]0;1[\quad f(\alpha)=\alpha$

ب- نستنتج أن $\forall x\in]0;1[-\{\alpha\} \quad |f(x)-\alpha|\le\frac{1}{4\cos^2 1}|x-\alpha|$

ليكن $x\in]0;1[-\{\alpha\}$

لدينا f متصلة على مجال مغلق طرفاه α و x

f قابلة للاشتقاق على مجال I مفتوح طرفاه α و x

ومنه يوجد عدد c ينتمي إلى I حيث $f(x)-f(\alpha)=f'(c)(x-\alpha)$

و حيث أن $\forall x\in[0;1] \quad |f'(x)|\le\frac{1}{4\cos^2 1}$ فان $\forall x\in]0;1[-\{\alpha\} \quad |f(x)-\alpha|\le\frac{1}{4\cos^2 1}|x-\alpha|$

-4 $\begin{cases} u_0\in]0;1[-\{\alpha\} \\ u_{n+1}=\frac{1}{4}\tan\left(\frac{1}{u_n+1}\right)\end{cases}$

أ- نبين أن $|u_0-\alpha|$ $\forall n\in\mathbb{N}\quad |u_n-\alpha|\le\left(\frac{1}{4\cos^2 1}\right)^n$

لدينا $f(u_n)$ = $\forall n\in\mathbb{N}\qquad u_{n+1}=\frac{1}{4}\tan\left(\frac{1}{u_n+1}\right)$

نبين بالترجع أن $u_n\in\left]0;1\right[\quad \forall n\in\mathbb{N}$ ....

ومنه $\left|f(u_n)-\alpha\right|\le\frac{1}{4\cos^2 1}|u_n-\alpha|$ و بالتالي $|u_{n+1}-\alpha|\le\frac{1}{4\cos^2 1}|u_n-\alpha|$

من أجل $n=0$ لدينا $|u_1-\alpha|\le\frac{1}{4\cos^2 1}|u_0-\alpha|$

من أجل $n=1$ لدينا $|u_2-\alpha|\le\frac{1}{4\cos^2 1}|u_1-\alpha|$

....

....

....

$$|u_n-\alpha|\le\frac{1}{4\cos^2 1}|u_{n-1}-\alpha|$$

بضرب أطراف المتفاوتات والاختزال نحصل على $|u_0-\alpha|$ $\forall n\in\mathbb{N}\quad |u_n-\alpha|\le\left(\frac{1}{4\cos^2 1}\right)^n$

ب- نستنتج أن (u_n) متقاربة و حدد نهايتها.

لدينا $|u_0-\alpha|$ $\forall n\in\mathbb{N}\quad |u_n-\alpha|\le\left(\frac{1}{4\cos^2 1}\right)^n$

المتتالية $\left(\left[\frac{1}{4\cos 1}\right]^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة و $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{4\cos 1}\right]^n=0$

ومنه (u_n) متقاربة و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\alpha$

التمرين3

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي $\begin{cases} u_0=2 \\ u_{n+1}=g(u_n) \quad \forall n\in\mathbb{N}\end{cases}$

حيث $g(x)=\arctan\sqrt{x+2}\qquad \forall x\in[0;2]$

1- أ) بين أن $\arctan x\le x\quad \forall x\in\mathbb{R}^+$

ب) بين أن $0\le u_n\le 2\quad \forall n\in\mathbb{N}$

ج) بين أن (u_n) متقاربة

2- أ) بين أن المعادلة $g(x)=x$ تقبل حلا وحيدا α من $]0;2[$

ب) أثبت أن $g'(x)\le\frac{1}{6\sqrt{2}}\quad \forall x\in\left]0;2\right[$

ج) بين أن $|u_{n+1}-\alpha|\le\frac{1}{6\sqrt{2}}|u_n-\alpha|\quad \forall n\in\mathbb{N}$ استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

الحل

2- أ) نبين أن $\arctan x\le x\quad \forall x\in\mathbb{R}^+$

لدينا $x \to x$ و $x \to \arctan x$ متصلتان على $\mathbb{R}^+$ و قابلتان للاشتقاق على $]0;+\infty[$

$$(x)' = x \qquad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

لدينا $\frac{1}{1+x^2} \prec 1 \quad \forall x \in]0;+\infty[$ أي $(\arctan x)' \prec (x)' \quad \forall x \in]0;+\infty[$

و $\arctan 0 = 0$

إذن $\arctan x \le x \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$

ب) نبين أن $0 \le u_n \le 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

من أجل $n = 0$ لدينا $0 \le u_0 \le 2$ لان $u_0 = 2$

نفترض أن $0 \le u_n \le 2$ ونبين أن $0 \le u_{n+1} \le 2$

لدينا $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}(3+x)} \succ 0 \quad \forall x \in [0;2]$ ومنه g تزايدية على $[0;2]$

وحيث أن $0 \le u_n \le 2$ فان $g(0) \le g(u_n) \le g(2)$ أي $g(0) \le u_{n+1} \le g(2)$

لدينا $g(2) = \arctan 2 \le 2 \quad ; \quad g(0) = \arctan\sqrt{2} \ge 0$

ومنه $0 \le u_{n+1} \le 2$ إذن $0 \le u_n \le 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

ج) نبين أن (u_n) متقاربة

لندرس رتابة (u_n)

لدينا $u_1 = g(u_0) = g(2) = \arctan 2$ ومنه $u_1 \le u_0$

نفترض أن $u_{n+1} \le u_n$ نبين أن $u_{n+2} \le u_{n+1}$

لينا $u_{n+1} \le u_n$

و حيث أن g تزايدية على $[0;2]$ فان $g(u_{n+1}) \le g(u_n)$ أي أن $u_{n+2} \le u_{n+1}$

إذن $u_{n+1} \le u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

ومنه (u_n) تناقصية و بما أن (u_n) مصغورة بالعدد 0 فان (u_n) متقاربة

ج) أ) نبين أن المعادلة $g(x) = x$ تقبل حلا وحيدا α من $]0;2[$

نعتبر الدالة h حيث $h(x) = g(x) - x$

h متصلة على $[0;2]$ قابلة للاشتقاق على $]0;2[$

و $h(0) \times h(2) = (\arctan\sqrt{2})(-2 + \arctan 2) \prec 0$

ومنه المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلا في $]0;2[$

لدينا $h'(x) = g'(x) - 1 = \frac{1}{2\sqrt{x+2}(3+x)} - 1 = \frac{1 - 2\sqrt{x+1}(x+3)}{2\sqrt{x+2}(3+x)}$

وحيث $1 - 2\sqrt{x+1}(x+3) \prec 0 \quad \forall x \in]0;2[$ فان h تناقصية قطعا على $]0;2[$

إذن المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا في $]0;2[$

ب) نثبت أن $g'(x) \le \frac{1}{6\sqrt{2}} \quad \forall x \in]0;2[$

ليكن $x \in]0;2[$ لدينا $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}(3+x)}$

بما أن $0 \prec x \prec 2$ فان $3 \prec x+3 \prec 5$ و $2\sqrt{2} \prec 2\sqrt{x+2} \prec 4$

و بالتالي $6\sqrt{2} \prec 2(x+3)\sqrt{x+2} \prec 20$ ومنه $\dfrac{1}{2\sqrt{x+2}(3+x)} \prec \dfrac{1}{6\sqrt{2}}$

إذن $\forall x \in]0;2[\quad g'(x) \leq \dfrac{1}{6\sqrt{2}}$

ج) نبين أن $|u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{6\sqrt{2}}|u_n - \alpha| \quad \forall n \in \mathbb{N}$ و نستنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

g متصلة على $[0;2]$ و قابلة للاشتقاق على $]0;2[$ و $\alpha \in]0;2[$ و $u_n \in [0;2] \quad \forall n \in \mathbb{N}$

ومنه يوجد c من $]0;2[$ حيث $g(u_n) - g(\alpha) = g'(c)(u_n - \alpha) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

و بالتالي $|g(u_n) - g(\alpha)| = |g'(c)||u_n - \alpha| \quad \forall n \in \mathbb{N}$

و حيث $|g'(c)| \leq \dfrac{1}{6\sqrt{2}}$ فان $|g(u_n) - g(\alpha)| \leq \dfrac{1}{6\sqrt{2}}|u_n - \alpha| \quad \forall n \in \mathbb{N}$

إذن $|u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{6\sqrt{2}}|u_n - \alpha| \quad \forall n \in \mathbb{N}$

نستنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

لدينا

$$|u_1 - \alpha| \leq \frac{1}{6\sqrt{2}}|u_0 - \alpha|$$

$$|u_2 - \alpha| \leq \frac{1}{6\sqrt{2}}|u_1 - \alpha|$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{6\sqrt{2}}|u_{n-1} - \alpha|$$

بضرب أطراف المتفاوتات و الاختزال نحصل على

$$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{6\sqrt{2}}\right)^n |u_0 - \alpha|$$

و حيث $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{6\sqrt{2}}\right)^n = 0$ فان $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$