تمارين

تمرين1

نعتبر أن الدالة العددية f متصلة على $[0;1]$ قابلة للاشتقاق على $]0;1[$ بحيث $f(1)=1$
و $f(0)=0$
بين أن $\exists c \in]0;1[\quad 2cf'(c)=\sqrt{c}$

تمرين2

لتكن f دالة عددية معرفة على $[0;1]$ بما يلي $f(x)=\frac{1}{4}\tan\frac{1}{x+1}$

7- بين أن f قابلة للاشتقاق على $[0;1]$ و أن $\forall x \in [0;1] \quad |f'(x)| \leq \frac{1}{4\cos^2 1}$

8- بين أن $f([0;1]) \subset [0;1]$

9- أ- بين أنه : $\exists! \alpha \in]0;1[\quad f(\alpha)=\alpha$

ب- استنتج أن $\forall x \in]0;1[-\{\alpha\} \qquad |f(x)-\alpha| \leq \frac{1}{4\cos^2 1}|x-\alpha|$

4- نعتبر المتتالية العددية المعرفة كما يلي : $\begin{cases} u_0 \in]0;1[-\{\alpha\} \\ u_{n+1}=\frac{1}{4}\tan\left(\frac{1}{u_n+1}\right) \end{cases}$

أ- بين أن $|u_0-\alpha|$ $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n-\alpha| \leq \left(\frac{1}{4\cos^2 1}\right)^n |u_0-\alpha|$

ب- استنتج أن (u_n) متقاربة و حدد نهايتها.

تمرين3

I- لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي المعرفة بـ

$$\begin{cases} f(x) = x+2-\sqrt{x^2+2x} & x \prec -2 \\ f(x) = \arctan\sqrt{x+2} & x \geq -2 \end{cases}$$

1- أدرس اشتقاق f عند -2

2- حدد الدالة المشتقة للدالة f

II- ليكن g قصور f على $[0;2]$ و (u_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = g(u_n) & \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

3- أ) بين أن $\arctan x \leq x \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$

ب) بين أن $0 \leq u_n \leq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

ج) بين أن (u_n) متقاربة

2- أ) بين أن المعادلة $g(x) = x$ تقبل حلا وحيدا α من $]0;2[$

ب) أثبت أن $g'(x) \leq \dfrac{1}{6\sqrt{2}} \quad \forall x \in]0;2[$

ج) بين أن $|u_{n+1}-\alpha| \leq \dfrac{1}{6\sqrt{2}}|u_n-\alpha| \quad \forall n \in \mathbb{N}$ استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

تمرين4

لتكن f متصلة على $[a;b]$ بحيث $f(a) = f(b) = 0$ و $f'(a) = 0$

بين أنه $\exists c \in \mathbb{N} \quad f'(c) = \dfrac{f(c)}{c-a}$

تمرين5 مبرهنة (LAGRANGE

لتكن f و g متصلتين على $[a;b]$ و قابلتين للاشتقاق على $]a;b[$ بحيث $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a;b[$

1- بين أن $g(a) \neq g(b)$

2- نعتبر الدالة ψ المعرفة على $[a;b]$ بـ: $\psi(x) = f(x) - f(a) - k\left(g(x) - g(a)\right)$

أ) حدد k لكي تكون $\psi(b)=0$

ب) استنتج أن $\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \quad \exists c\in]a;b[$

تمرين6

لتكن f دالة عددية قابلة للاشتقاق على $[0;1]$ بحيث $f(0)=0$ و $f'(x)\neq 0 \quad \forall x\in[0;1]$

بين أن f لها إشارة ثابتة على $[0;1]$

تمرين7

لتكن f متصلة على $[a;b]$ و قابلة للاشتقاق على $]a;b[$

ليكن $x_0\in]a;b[$ و $k\in\mathbb{R}_+^*$ بحيث $[x_0;x_0+h]\subset[a;b]$

1- بين أنه: $f(x_0+h)-f(x_0)=hf'(x_0+\theta h) \quad \exists\theta\in]0;1[$

2- تطبيق نعتبر $f(x)=\frac{1}{x+1}$

حدد θ بدلالة h ثم أحسب $\lim_{h\to 0}\theta$