مبرهنة رول و مبرهنة التزايدات المنتهية:

التمرين رقم 01 (مبرهنة Taylor – Lagrange)

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق $(n+1)$ مرة على مجال I من $\mathbb{R}$ حيث $n\in\mathbb{N}^*$

ليكن a و b عددين حقيقيين من المجال I بحيث $a\langle b$

نضع :
$$\Psi(x)=f(b)-\sum_{k=0}^{n}f^{(k)}(x)\frac{(b-x)^k}{k!}-\frac{(b-x)^{n+1}}{(b-a)^{n+1}}\left(f(b)-\sum_{k=0}^{n}f^{(k)}(a)\frac{(b-a)^k}{k!}\right)$$

1 – أحسب $\Psi'(x)$ لكل $x\in]a,b[$

2 – بين أنه يوجد عدد حقيقي c من المجال $]a,b[$ بحيث :
$$f(b)-f(a)=f'(a)\frac{(b-a)}{1!}+f''(a)\frac{(b-a)^2}{2!}+\cdots+f^{(n)}(a)\frac{(b-a)^n}{n!}+f^{(n+1)}(c)\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

3 – لتكن f دالة قابلة للاشتقاق 3 مرات على مجال I من $\mathbb{R}$. وليكن a وb عددين حقيقيين من المجال I بحيث : $a\langle b$

بين أنه يوجد عدد حقيقي c من المجال $]a,b[$ بحيث:
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(a)+\frac{1}{2}(b-a)f''(a)+\frac{1}{6}(b-a)^2f'''(c)$$

التمرين رقم 02: (Règle de L'Hospital)

لتكن f و g دالتين عدديتين متصلتين على مجال $[a,b]$ و قابلتين للاشتقاق على المجال $]a,b[$

1 – بين أنه: $\left(f(b)-f(a)\right)g'(c)=\left(g(b)-g(a)\right)f'(c)$ $\quad(\exists c\in]a,b[):$

2 – نفترض أن $g'(x)\neq 0$ $\quad(\forall x\in]a,b[):$

ليكن $x_0\in[a,b]$ بحيث $f(x_0)=g(x_0)=0$

a – بين أن: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\ell\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\ell$

b – استنتج $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{Arc\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{4}{\pi}x-1\right)}$

التمرين رقم 03:

1 – بين أن: $|\sin x-\sin y|\le|x-y|$ $\quad(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2):$

$|\cos x-\cos y|\le|x-y|$ $\quad(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2):$

2 – لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي
$$f(x)=\sin(\cos x)-\cos(\sin x)$$

a - بين أن: $f(x)\langle -2\sin\left(\frac{x+\sin x}{2}\right)\sin\left(\frac{x-\sin x}{2}\right)$ $\quad\left(\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\right):$

بين أن: $\cos(\sin x)\rangle 0$ و $\sin(\cos x)\le 0$ $\quad\left(\forall x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]\right):$

استنتج أن: $f(x)\langle 0$ $\quad(\forall x\in\mathbb{R}):$

الثانية علوم رياضية - ثانوية الجولان التأهيلية - بيوكرى -

AHMED MOUMNI