التمرين الأول :

1) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $Z^2 - 2i\sqrt{3}Z - 4 = 0$

2) نضع $a = 1 + i\sqrt{3}$; $b = -1 + i\sqrt{3}$ و نعتبر في المستوى العقدي (P) المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ النقطتين $A(a)$; $B(b)$.

ليكن R_1 الدوران الذي مركزه O و زاويته $\dfrac{\pi}{3}$ و R_2 الدوران الذي مركزه B و زاويته $\dfrac{2\pi}{3}$ و نعتبر التطبيق $f = R_2 \circ R_1$

أ- بين أن $f(B) = A$

ب- لتكن $M(m)$ نقطة من (P) و نعتبر النقطتين $N = R_1(M)$ و $M' = f(M)$

(i) حدد بدلالة m العدد العقدي n لحق النقطة N

(ii) بين أن لحق النقطة M' هو العدد $m' = -m + 2i\sqrt{3}$ و استنتج طبيعة التطبيق f

ج- حدد مجموعة النقط $M(m)$ التي يكون من أجلها M , N , M' مستقيمية

التمرين الثاني :

نعتبر في الفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathrm{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ المجموعة E للمصفوفات والتي تكتب على الشكل $M = \begin{pmatrix} a & b \\ -2b & a+2b \end{pmatrix}$ حيث $(a,b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ و نضع $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

1) أ- بين أن $(E,+)$ زمرة تبادلية

ب- بين أن $(E,+,\cdot)$ فضاء حقيقي و أعط بعده

2) أحسب J^2 بدلالة I , J واستنتج الجداء $M(a,b)\times M(c,d)$

3) نعتبر التطبيق f المعرف ب : $\begin{cases} f \;:\; E \to \mathbb{C} \\ M(a,b) \to z = (a+b) + ib \end{cases}$

أ- بين أن f تقابل و عرف تقابله العكسي

ب- بين أن f تشاكل من $(E,\times)$ نحو $(\mathbb{C},\times)$

ج- استنتج بنية $(E,+,\times)$

د- حدد في E حلول المعادلة $M^3 - I + J = \theta$ حيث θ هي المصفوفة المنعدمة في $M_2(\mathbb{R})$

التمرين الثالث :

الجزء (1) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $D =]0,+\infty[$ بما يلي :

$$f(x) = \frac{x-1}{x\,lnx} \quad ; \quad x \neq 1 \qquad \text{و} \qquad f(1) = 1$$

1) بين أن الدالة f متصلة على D

2) أ- بين أن $f'(x) = \dfrac{lnx - x + 1}{(x\,lnx)^2}$ $(\forall x \in D - \{1\})$

ب- بين أن الدالة f تناقصية على D

الجزء (2)

F دالة معرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي : $\begin{cases} F(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} f(t)\,dt & , \; x \neq 0 \;;\; x \neq 1 \\ F(0) = -ln2 \quad ; \quad F(1) = 0 \end{cases}$

1) أ- بين أن $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{t\,lnt}\,dt = ln2$ $(\forall x \in]0,1[)$

ب- بين أن $(x^2-1)ln2 \le F(x) \le (x-1)ln2$ $(\forall x \in]0,1[)$

ج- أدرس اتصال الدالة F على يمين 0 و على يسار 1

2) أ- بين أن $\dfrac{x^2-x}{2\,lnx} \le F(x) + ln2 \le \dfrac{x^2-x}{lnx}$ $(\forall x \in]0,1[)$

ب- أدرس قابلية اشتقاق الدالة F على يمين 0

3) ليكن x من المجال $]1,+\infty[$.

أ- بين أن $F(x) = (x^2 - x)f(c)$ $\left(\exists c \in [x,x^2]\right)$

ب- أدرس اتصال و قابلية اشتقاق الدالة F على يمين النقطة 1

ج- بين أن $F(x) \ge lnx$ و أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$

4) أ- بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على كل من $]0,1[$ و $]1,+\infty[$ و أن $F'(x) = \dfrac{x-1}{lnx}$

ب- أدرس منحى تغيرات الدالة F و ضع جدول تغيراتها