

التمرين 4:

التعبير العقدي للتطبيق f من الشكل:
 $\alpha = 1 \in \mathbb{R}^2 = \{z \mid z = z + \beta\}$ حيث $z = z + \beta$
 إذن فالتطبيق f هو التناوب الذي
 مركزه $(\sqrt{3}i - 2)$ ونصفه -1

(M, M', N) نقطة مستقيمة $\Leftrightarrow \frac{m' - m}{n - m} \in \mathbb{R}$

$$\frac{m' - m}{n - m} = \frac{-m + 2i\sqrt{3} - m}{\frac{1}{2}m + \frac{\sqrt{3}}{2}im - m}$$

$$= \frac{2(-m + i\sqrt{3})}{\frac{1}{2}m(-1 + \sqrt{3}i)}$$

$$= \frac{4(-m + i\sqrt{3})}{m(-1 + \sqrt{3}i)}$$

$$\frac{m' - m}{n - m} \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{4(-m + i\sqrt{3})}{m(-1 + \sqrt{3}i)} = \frac{4(-\bar{m} + i\sqrt{3})}{\bar{m}(-1 + \sqrt{3}i)}$$

$$\Rightarrow \bar{m}(-m + i\sqrt{3}) = m(-\bar{m} + i\sqrt{3})$$

$$\Rightarrow -|m|^2 + i\sqrt{3}\bar{m} = -|m|^2 + i\sqrt{3}m$$

$$\Rightarrow m = \bar{m}$$

$$\Rightarrow m \in \mathbb{R}$$

ومن: مجموعة النقطة $M(m)$ التي
 يكون من أجلها M و N و M' مستقيمة
 هو محور الأعداد الحقيقية $y=0$

التمرين 2:

1- أ. لتبين أن $(E, +)$ زمرة قبادلية.

لدينا: $E \neq \emptyset$ حيث $a=b=0$
 $(E, +)$ المغلقة المنغلقة

يمكن A و B منحرفين من E
 $(x, y, a, b) \in \mathbb{R}^4$

$$A \begin{pmatrix} a & b \\ -2b & a+2b \end{pmatrix} \text{ و } B \begin{pmatrix} x & y \\ -2y & x+2y \end{pmatrix}$$

2) لحل المعادلة: $Z^2 - 2i\sqrt{3}Z - 4 = 0$

$$\Delta = 4 = 2^2$$

$$Z_1 = \frac{2i\sqrt{3} - 2}{2} = -1 + \sqrt{3}i$$

$$Z_2 = \frac{2i\sqrt{3} + 2}{2} = 1 + \sqrt{3}i$$

إذن مجموعة حلول المعادلة هي:

$$S = \{-1 + \sqrt{3}i, 1 + \sqrt{3}i\}$$

2) أ. لكل نقطة $M(z)$ من المستوى العقدي نض:

$M_1 = R_1(M)$ و $M_2 = R_2(M)$ وليكن Z_1 و Z_2
 نقطتي التقاطع M_1 و M_2

$$R_1(M) = M_1 \Leftrightarrow Z_1 = z e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$R_2(M) = M_2 \Leftrightarrow Z_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}}(z - b) + b$$

$$R_2 \circ R_1(M) \Leftrightarrow Z_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}}(z e^{i\frac{\pi}{3}} - b) + b$$

$$\Leftrightarrow Z_2 = -z - b e^{i\frac{2\pi}{3}} + b$$

$$f(B) = R_2 \circ R_1(B) \Leftrightarrow Z_2 = -b - b e^{i\frac{2\pi}{3}} + b$$

$$\Leftrightarrow Z_2 = -2 e^{i\frac{2\pi}{3}} b + b$$

$$\Leftrightarrow Z_2 = -2 e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$\Leftrightarrow Z_2 = 1 + \sqrt{3}i$$

$$\Leftrightarrow Z_2 = a$$

$$f(B) = A$$

$$N = R_1(M) \Leftrightarrow n = m e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{1}{2}m + \frac{\sqrt{3}}{2}mi$$

لدينا التناوب العقدي للتطبيق f

$$Z' = -2 - b(e^{i\frac{2\pi}{3}} - 1)$$

$$Z' = -2 - (\sqrt{3}i - 1) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} \right)$$

$$Z' = -2 - \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{3}i - \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{1}{2} \right)$$

$$Z' = -2 + 2\sqrt{3}i$$

$$f(M) = M' \Leftrightarrow m' = -m + 2\sqrt{3}i$$

ومن ثم الأسيرة (I) حرة
وعلى (I, J) أساس للفضاء الحقيقي (E, +, ·)
إذن: $\dim E = 2$

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = -2I + 2J$$

لنستنتج البداء
 $M(a, b) \times M(c, d)$

$$M(a, b) \times M(c, d) = (aI + bJ) \times (cI + dJ) = acI + adJ + bcJ + bdJ^2 = acI + adJ + bcJ + 2bdJ - 2bdI = (ac - 2bd)I + (ad + bc + 2bd)J$$

(B) - 2- نبين أن f تقابل
ليكن z و w من \mathbb{R}^2
 $z = x + yi$
 $w = u + vi$
 $M \in E$

$$f(M(a, b)) = z \Rightarrow (a+b) + bi = x + yi \Rightarrow \begin{cases} a+b = x \\ b = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = x - y \\ b = y \end{cases}$$

$$(\forall z \in E) (\exists! M(a, b) \in E) // (M(a, b)) = z$$

إذن f تقابل من E نحو E

$$f^{-1} \phi \rightarrow E$$

$$z = x + yi \rightarrow M(x - y, y)$$

ب- نبين أن f تقابل من (E, \times) نحو $(E, +)$
 $M(c, d) \times M(a, b)$ عكس من E

$$f(M(a, b) \times M(c, d)) = f(M(ac - 2bd, ad + bc + 2bd)) = (ac - 2bd) + (ad + bc + 2bd)i$$

$$A - B = \begin{pmatrix} a & b \\ -2b & a + 2b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x & -y \\ 2y & -x - 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-x & b-y \\ -2(b-y) & (a-x) + 2(b-y) \end{pmatrix}$$

$$p = b - y \quad \alpha = a - x \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

$$A - B = \begin{pmatrix} \alpha & p \\ -2p & \alpha + 2p \end{pmatrix} \in E$$

إذن: زمرة جزئية من الزمرة $(E, +)$

$$(M_2(\mathbb{R}), +)$$

و بما أن: زمرة قبادلية $(M_2(\mathbb{R}), +)$

فإن: زمرة تبادلية $(E, +)$

ج- لنبين أن: $(E, +, \cdot)$ فضاء حقيقي

لدينا: زمرة جزئية من $(M_2(\mathbb{R}), +)$

لنبا أن E حيز مستقر من $(M_2(\mathbb{R}), \cdot)$

ليكن M معكوفة من E و $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda M = \lambda \begin{pmatrix} a & b \\ -2b & a + 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ -2\lambda b & \lambda a + 2\lambda b \end{pmatrix}$$

نضع: $\lambda a = \alpha$ و $\lambda b = \beta$

$$\lambda M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -2\beta & \alpha + 2\beta \end{pmatrix} \in E \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

ومن ثم E حيز مستقر في $(M_2(\mathbb{R}), \cdot)$

إذن: $(E, +, \cdot)$ فضاء جزئي من $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$

و بما أن $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ فضاء حقيقي

فإن: $(E, +, \cdot)$ فضاء حقيقي

لنحدد بعبارة $M \in E$

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ -2b & a + 2b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= aI + bJ$$

ومن ثم: أسيرة هولدة للفضاء $(E, +, \cdot)$

$$M = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ -2b & a + 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow a = 0 \text{ و } b = 0$$

لدينا: $Z = (a+b) + 2i$

$$\begin{cases} b = -1 \\ a = 1 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} b = -\frac{1}{2} \\ a+b = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} b = -\frac{1}{2} \\ a+b = \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

وهذه حلول المعادلة فوق

$$S = \left\{ M(1, -1); M\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}, -\frac{1}{2}\right); M\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) \right\}$$

التحريص (3)

ابعد x

$f(1) = 1$ و $f(x) = \frac{x-1}{x \ln x}$ $x > 1$

4. لبيّن أن الدالة متصلة في D

لدينا $f(x) = \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\ln(x)} \right) \times \frac{1}{x}$
 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\ln(2)} \right) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4 \ln 2}$
 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$
 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\ln(x)} = \frac{1}{\ln(2)}$

وهذا متطابق مع $\frac{1}{4}$ ولدينا

$D = \{1\}$ $x \rightarrow x$ متصلة في D ومميز متصلة في هذا المجال

$D = \{2\}$ $x \rightarrow x$ متصلة مع $\frac{1}{x}$ وهذا

$D = \{2\}$ $\frac{x-1}{x \ln x}$ متصلة مع $\frac{1}{x}$ وهذا

وهذا الدالة f متصلة على D $2 \cdot 1$ بين

$(\forall x \in D - \{2\}) f'(x) = \frac{\ln x - x + 1}{(x \ln x)^2}$
 $f'(x) = \frac{x \ln x - (\ln x)(x-1)}{(x \ln x)^2}$

$f'(x) = \frac{\ln x - x + 1}{(x \ln x)^2}$ $(\forall x \in D - \{2\})$

ب. لبيّن أن الدالة متناقصية على D $نضع$

$g(x) = \ln x - x + 1$
 $g'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$

x	0	2	$+\infty$
$g(x)$		+	-
$g'(x)$	$-\infty$	0	$-\infty$

وهذا جزء آخره:
 $f(M(a,b)) \times f(M(c,d)) = ((a+b) + 2i)((c+d) + 2i)$
 $= ac + ad + bc + bd + (a+d)i + (c+d)i - 2d$

$= (ac + ad + bc) + (ad + bc + 2bd) + (a+d)i + (c+d)i - 2d$
 $= f(M(a,b)) \times f(M(c,d))$

وهذا: f تشاكل من $(E, +)$ نحو (F, \times)
 ج. لنصنف فتح نبين $(E, +, \times)$ $لدينا$

$(E, +)$ زمرة تبادلية

f تشاكل قفا بين $(E, +)$ و (F, \times)

$f^{-1}(E^*) = E^*$

لدينا: (F^*, \times) زمرة تبادلية

(E^*, \times) زمرة تبادلية

و من خلال السؤال 2 في جزء هذا قسم

$(M_2(\mathbb{R}), \times)$

لدينا X توزيعي مع $+$ في $(M_2(\mathbb{R}), \times)$ $وهذا$

X توزيعي مع $+$ في E

نستنتج أن $(E, +, \times)$ جبر تبادلي

د. لنجد في E حلول المعادلة

$M^3 - I + J = 0$ حيث I هي المصفوفة 3×3 المتطابقة $لـ 1$ في $M_3(\mathbb{R})$

$M^3 - I + J = 0 \Rightarrow f(M^3) = f(I - J)$

$\Rightarrow (f(M))^3 = -i$

$\Rightarrow ((a+b) + 2i)^3 = -i$

$Z = x + yi$ $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$Z^3 = -i \Rightarrow Z^3 - (-i) = 0$

$\Rightarrow (Z+i)(Z^2 + Zi - 1) = 0$

$\Rightarrow Z = -i$ أو $Z^2 + Zi - 1 = 0$

$\Delta = 3 = (\sqrt{3})^2$

$Z = \frac{-i - \sqrt{3}}{2}$ أو $Z = \frac{-i + \sqrt{3}}{2}$

(2) -1 لنبين ان: $(\forall x \in]0, 2[)$

$$\frac{x^2 - x}{2 \ln x} \ll (F(x) + \ln(2)) \ll \frac{x^2 - x}{\ln(x)} \quad (\forall x \in]0, 2[)$$

$$F(x) + \ln(2) = \int_x^{x^2} \frac{t-1}{t \ln(t)} dt + \int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln(t)} dt$$

$$= \int_x^{x^2} \frac{t}{t \ln(t)} dt$$

$$= \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)} dt$$

لدينا $x^2 < x$ $(\forall x \in]0, 2[)$

$$x^2 < t < x \Rightarrow 2 \ln(x) \ll \ln(t) \ll \ln(x)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2 \ln(x)} \ll \frac{1}{\ln(t)} \ll \frac{1}{\ln(x)}$$

$$\Rightarrow \int_x^{x^2} \frac{1}{2 \ln(x)} dt \ll \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)} dt \ll \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(x)} dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2 \ln(x)} [t]_x^{x^2} \ll (F(x) + \ln(2)) \ll \frac{1}{\ln(x)} [t]_x^{x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - x}{2 \ln(x)} \ll (F(x) + \ln(2)) \ll \frac{x^2 - x}{\ln(x)} \quad (\forall x \in]0, 2[)$$

ب- لندرس قابلية اشتقاق F مع تعيين 0

$$\frac{F(x) - F(0)}{x} = \frac{F(x) + \ln(2)}{x} \quad (\forall x \in]0, 2[)$$

$$\frac{x-1}{2 \ln(x)} \ll \frac{F(x) + \ln(2)}{x} \ll \frac{x-1}{\ln(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{2 \ln(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{\ln(x)} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x) + \ln(2)}{x} = 0 \in \mathbb{R}$$

و عليه: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x) + \ln(2)}{x} = 0 \in \mathbb{R}$

(3) -1 لدينا: $f(t) \rightarrow$ تؤولت مع $[x, x^2]$

$$(\forall x > 1)$$

$$\exists c \in [x, x^2] / f(c) = \frac{1}{x^2 - x} F(x)$$

$$\exists c \in [x, x^2] / F(x) = (x^2 - x) f(c)$$

$$(\forall x > 1)$$

$$x < c < x^2 \Rightarrow f(x^2) \ll f(c) \ll f(x)$$

$$(\forall x > 1), [x, x^2] \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \emptyset$$

$$(x^2 - x) f(x^2) \ll (x^2 - x) f(c) \ll (x^2 - x) f(x)$$

و منه: $\forall x \in D - \{2\}, g(x) < 0$

و منه: $f(x) < 0 \quad \forall x \in D - \{2\}$

و عليه ف تؤولت مع 0

الجزء (2):

(1) -1 $(\forall x \in]0, 2[)$

$$\int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln(t)} dt = \left[\ln |\ln(t)| \right]_x^{x^2}$$

$$= \ln |\ln(x^2)| - \ln |\ln(x)|$$

$$= \ln \left(\frac{2 \ln(x)}{\ln(x)} \right)$$

$$= \ln(2)$$

$$\int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln(t)} dt = \ln(2) \quad (\forall x \in]0, 2[)$$

ب- لنبين ان: $(\forall x \in]0, 2[)$

$$(x^2 - 1) \ln(2) \ll (F(x) + \ln(2)) \ll (x - 1) \ln(2)$$

$$x^2 < x \quad (\forall x \in]0, 2[)$$

$$x^2 < t < x \Rightarrow x^2 - 1 < t - 1 < x - 1$$

$$\Rightarrow \frac{(x-1)}{t \ln(t)} \ll \frac{2 \cdot 1}{t \ln(t)} \ll \frac{x^2 - 1}{t \ln(t)}$$

$$(x^2 - 1) \ln(2) \ll (F(x) + \ln(2)) \ll (x - 1) \ln(2)$$

$$(x^2 - 1) \ln(2) \ll (F(x) + \ln(2)) \ll (x - 1) \ln(2)$$

$$(\forall x \in]0, 2[)$$

ج- لندرس تؤولت هارو لدراسة F مع تعيين 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - 1) \ln(2) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - 1) \ln(2) = -\ln(2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = -\ln(2) = F(0)$$

و منه: F متصلة مع تعيين 0

لندرس انتقال الدالة مع تعيين 2

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 1) \ln(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x - 1) \ln(2) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} F(x) = 0 = F(2)$$

و منه: F متصلة مع تعيين 2

ومن فهي تقبل دالة أهلية G بسيف

$$F(x) = G(x^2) - G(x)$$

$x \rightarrow \infty$ قابلة للاشتقاق G على $[a, +\infty[$ و $[0, a[$

$$f(x) \in [0, a[$$

$$f(x) \in [a, +\infty[$$

$G(x)$ قابلة للاشتقاق على $[0, a[\cup]a, +\infty[$ ومنه

$G \circ f(x)$ قابلة للاشتقاق على كل

من $]a, +\infty[\cup]0, a[$

$$\begin{aligned} F'(x) &= 2x G'(x^2) - G'(x) \\ &= 2x f(x^2) - f(x) \\ &= 2x \left(\frac{x^2 - 1}{2x^2 \ln(x)} \right) - \left(\frac{x-1}{x \ln(x)} \right) \\ &= \frac{x^2 - x}{x \ln(x)} \\ &= \frac{x-1}{\ln(x)} \end{aligned}$$

$\forall x \in]0, a[\cup]a, +\infty[$ و عليه F متزايدة قطعا على $[0, +\infty[$

جدول التغيرات

x	0	a	$+\infty$
$F'(x)$		+	+
$F(x)$	$-\ln(2)$	0	$+\infty$

من اشارة التاميزة: امنية تامو
تحت اشراف الاستاذ:
المفاتيح بوشعيب

$$(x^2 - x) f(x^2) \leq F(x) \leq (x^2 - x) f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - x) f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - x) f(x^2) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = 0 = F(1)$$

منه F متصلة على جميع المنقطه

$$\frac{F(x) - F(1)}{x-1} = \frac{F(x)}{x-1}$$

$$x f(x^2) \leq \frac{F(x)}{x-1} \leq x f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} x f(x^2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{F(x) - F(1)}{x-1} = 1 \in \mathbb{R}$$

منه F قابلة للاشتقاق على جميع المنقطه

ج - لنبين ان: $F(x) > \ln(x)$

$$F(x) - \ln(x) = \int_x^{x^2} \frac{t-1}{t \ln(t)} dt - \int_x^{x^2} \frac{1}{t} dt$$

$$= \int_x^{x^2} \frac{t-1 - \ln(t)}{t \ln(t)} dt$$

$$= \int_x^{x^2} \frac{-(\ln(t) - t + 1)}{t \ln(t)} dt$$

لدينا ان $g(t) = -(\ln(t) - t + 1) > 0$ $\forall t \in]1, +\infty[$

$$-(\ln(t) - t + 1) = -g(t) > 0 \quad \forall t \in]1, +\infty[$$

$$\int_x^{x^2} \frac{-(\ln(t) - t + 1)}{t \ln(t)} dt > 0$$

$$F(x) > \ln(x) \quad \forall x \in]1, +\infty[$$

منه $F(x) \rightarrow +\infty$ $x \rightarrow +\infty$

منه $\ln(x) \rightarrow +\infty$ $x \rightarrow +\infty$ حسب معاديق التقارب

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$$

ب- لنبين ان F قابلة للاشتقاق على كل

من $]1, +\infty[\cup]0, 1[$

$f(t)$ متصلة على كل من $]0, 1[$ و $]1, +\infty[$