تصحيح الغرض "2"

الدرس "2"

الجزء (1)

1) لدينا: $D_f = \mathbb{R}$

اذن $(x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R})$

$x \neq 0$

و: $f(-x) = \frac{\arctan(-x)}{-x} = \frac{-\arctan(x)}{-x}$

$= f(x)$

(لأن: $t \mapsto \arctan(t)$ دالة فردية).

← اذن الدالة f دالة زوجية.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\arct(x)}{x} = 0$

(لأن $\lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$)

---

2) $(\forall t \in \mathbb{R}^+)$: $t^4 \geq 0 \Rightarrow -t^4 \leq 0$

$\Rightarrow 1 - t^4 \leq 1$

وحيث: $1 - t^4 = (1-t^2)(1+t^2)$

و $(1+t^2 > 0)$،

اذن، $(1-t^2)(1+t^2) \leq 1$

أي $① \left(1 - t^2 \leq \frac{1}{1+t^2}\right)$

ولدينا أيضا، $(\forall t \in \mathbb{R}^+)$ $t^2 + 1 \geq 1$

اذن $② \left(\frac{1}{t^2+1} \leq 1\right)$

$② , ① \Rightarrow 1 - t^2 \leq \frac{1}{t^2+1} \leq 1$.

- لدينا $(\forall t \in \mathbb{R}^+)$ $1 - t^2 \leq \frac{1}{t^2+1} \leq 1$

$(x > 0)$ $\int_0^x (1-t^2)\,dt \leq \int_0^x \frac{1}{t^2+1}\,dt \leq \int_0^x dt$

$\left[t - \frac{t^3}{3}\right]_0^x \leq \left[\text{Arct}(t)\right]_0^x \leq [t]_0^x$

أي $x - \frac{x^3}{3} \leq \text{Arct}(x) \leq x$

ب. لنحسب $\lim_{x\to0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$

أي: $\lim_{x\to0^+} \frac{f(x) - 1}{x - 0}$

أي $\lim_{x\to0^+} \frac{\text{Arctan}(x) - x}{x^2}$

ولدينا $(\forall t \geq 0)$ $t - \frac{t^3}{3} \leq \text{Arct}(t) \leq t$

اذن $-\frac{x^3}{3} \leq \text{Arct}(x) - x \leq 0$

أي $-\frac{x}{3} \leq \frac{\text{Arct}(x) - x}{x^2} \leq 0$

وحيث $\lim_{x\to0^+} \left(\frac{-x}{3}\right) = 0$

اذن $\lim_{x\to0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$

---

3) أ. نعتبر، $t \overset{f}{\mapsto} \text{Arct}(t)$

f دالة متصلة على $[0, x]$ وقابلة للاشتقاق على $]0, x[$. اذن حسب مبرهنة التزايدات المنتهية.

$(\exists c \in]0, x[)$ $\text{Arct}(x) - \text{Arct}(0) = (x - 0)\, f'(c)$

أي $\text{Arct}(x) = x\, f'(c)$

وحيث: $f'(c) = \frac{1}{1+c^2}$.

و $0 \leq c \leq x \Rightarrow 1 \leq c^2 + 1 \leq x^2 + 1$

أي $\frac{1}{1+c^2} \geq \frac{1}{x^2+1}$

أي $(x > 0)$ $\frac{x}{1+c^2} \geq \frac{x}{x^2+1}$

أي $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$ $\text{Arct}(x) \geq \frac{x}{x^2+1}$

ب - لدينا f قابلة الاشتقاق على $\mathbb{R}^+$

و $(\forall x\in\mathbb{R}^+)\quad f'(x)=\dfrac{\left(\frac{1}{1+x^2}\right)x-\text{Arct}(x)}{x^2}$

$$=\frac{x-(1+x^2)\,\text{Arct}(x)}{(1+x^2)\,x^2}$$

• لدينا $(\forall x\in\mathbb{R}^+)\quad \arctan(x)\geqslant\dfrac{x}{x^2+1}$

أي $x-\text{Arctan}(x)(x^2+1)\leqslant 0$

أي $(\forall x\in\mathbb{R}^+)\ :\ f'(x)\leqslant 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$0 \nearrow$	1	$\searrow 0$

(لأن الدالة f دالة زوجية)

الجزء (2).

1) لدينا ، $D_g=\mathbb{R}$

اذن $(x\in\mathbb{R}\Rightarrow -x\in\mathbb{R})$

$x\neq 0$ أي $g(-x)=\dfrac{1}{(-x)}\displaystyle\int_0^{(-x)}f(t)\,dt$

نضع : $(-t=u)$ أي $(dt=-du)$

و $\begin{cases}t=0\Rightarrow u=0\\ t=x\Rightarrow u=x\end{cases}$

اذن $g(-x)=\dfrac{-1}{x}\displaystyle\int_0^{x}-f(-u)\,du$

وحيث أن الدالة f دالة زوجية $(f(x)=f(-x))$

اذن $g(-x)=\dfrac{-1}{x}\displaystyle\int_0^{x}-f(u)\,du$

$$=\frac{1}{x}\int_0^x f(u)\,du=g(x)$$

الدالة g دالة زوجية

2) أ. لدينا $\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x(1-f(t))\,dt$

$$=\frac{1}{x}\left[\int_0^x 1\,dt-\int_0^x f(t)\,dt\right]$$

$$=\frac{1}{x}\left[[t]_0^x-\int_0^x f(t)\,dt\right]$$

$$=\frac{1}{x}\left[x-\int_0^x f(t)\,dt\right]$$

$$=1-\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$$

$$=1-g(x)$$

اذن $(\forall x\in\mathbb{R}^{+*})\quad 1-g(x)=\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x(1-f(t))\,dt$

2) ب. لدينا حسب (جزء I - 3) ب)

$(\forall t\in\mathbb{R}^+)\quad \text{arct}(t)\geqslant\dfrac{t}{1+t^2}$

$(t>0)\quad \dfrac{\text{arct}(t)}{t}\geqslant\dfrac{1}{1+t^2}$

معنى $f(t)\geqslant\dfrac{1}{1+t^2}$

أي $1-f(t)\leqslant 1-\dfrac{1}{1+t^2}$

$x>0\quad \displaystyle\int_0^x(1-f(t))\,dt\leqslant\int_0^x\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt$

$x>0\quad \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x(1-f(t))\,dt\leqslant\frac{1}{x}(x-\text{Arct}(x))$

وحيث أن $(\forall t\in\mathbb{R})\quad 0\leqslant f(t)\leqslant 1$

وذلك حسب سؤال (3. ب)

أي ، $1-f(t)\geqslant 0$

أي $\Rightarrow 0\leqslant\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x(1-f(t))\,dt\leqslant 1-\frac{\text{Arct}(x)}{x}$

أي $0\leqslant 1-g(x)\leqslant 1-f(x)$

و $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0^+}1-f(x)=1-1=0\\ 1-g(x)\geqslant 0\end{array}\right\}$

اذن $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=1=g(0)$

أي أن g متصلة عند $x=0$

2- لنحسب $\lim_{x\to 0^+}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{g(x)-1}{x}$

- لدينا $0\le 1-g(x)\le 1-f(x)$

أي $f(x)-1\le g(x)-1\le 0$

$(x>0)$ $\frac{f(x)-1}{x}\le\frac{g(x)-1}{x}\le 0$

(1) $\frac{\text{Arct}(x)-x}{x^2}\le\frac{g(x)-1}{x}\le 0.$

$\text{arct}(x)\ge\frac{x}{1+x^2}\Longrightarrow \text{Arct}(x)-x\ge\frac{-x^3}{1+x^2}.$

أي (2) $\frac{\text{Arct}(x)-x}{x^2}\ge\frac{-x^2}{1+x^2}$

اذن من (1) و (2) نستنتج $\frac{-x^2}{1+x^2}\le\frac{g(x)-1}{x}\le 0$

و $\lim_{x\to 0^+}\frac{-x^2}{1+x^2}=0 \Longrightarrow \lim_{x\to 0^+}\frac{g(x)-g(1)}{x}=0$

اذن g قابلة الاشتقاق على يمين 0 و $g'_d(0)=0$

لدينا $(\forall t\in[1,+\infty[)\ 0\le \text{arct}(t)\le\frac{\pi}{2}$

أي $0\le\frac{\text{arct}(t)}{t}\le\frac{\pi}{2t}$ $\quad t>0$

$(x>1)$ $\quad 0\le\int_1^x\frac{\text{arct}(t)}{t}\,dt\le\int_1^x\frac{\pi}{2t}\,dt$

$0\le\int_1^x f(t)\,dt\le\left[\frac{\pi}{2}\ln(t)\right]_1^x$

$0\le\int_1^x f(t)\,dt\le\frac{\pi}{2}\ln(x).$

ومنه النتيجة.

---

3) ب- لدينا $g(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$

$=\frac{1}{x}\left(\int_0^1 f(t)\,dt+\int_1^x f(t)\,dt\right)$

$=\frac{1}{x}\int_0^1 f(t)\,dt+\frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt$

وحيث $1-\frac{t^2}{3}\le f(t)\le 1$

$\left[t-\frac{t^3}{9}\right]_0^1\le\int_0^1 f(t)\,dt\le 1$

$1-\frac{1}{9}\le\int_0^1 f(t)\,dt$

أي $(x>0)$ $\quad \frac{8}{9x}\le\frac{1}{x}\int_0^1 f(t)\,dt\le\frac{1}{x}$

اذن : (1) $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^1 f(t)\,dt=0$

وحيث $0\le\frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt\le\frac{\pi}{2x}\ln(x)$

اذن $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt=0$

(لأن $\lim_{x\to+\infty}\frac{\pi}{2x}\ln(x)=0$)

$\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$

---

4) أ. $x\xrightarrow{u}\frac{1}{x}$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^{+*}$

وحيث $f(t)$ متصلة على $\mathbb{R}^{+*}$ اذن تقبل دالة أصلية F قابلة الاشتقاق على $\mathbb{R}^{+*}$

أي $\int_0^x f(t)\,dt=F(x)-F(0)$

أي $x\xrightarrow{v}\int_0^x f(t)\,dt$ قابلة الاشتقاق على $\mathbb{R}^{+*}$

اذن : $x\xrightarrow{u.v} g(x)$ قابلة الاشتقاق على $\mathbb{R}^{+*}$

$g'(x)=\frac{-1}{x^2}\int_0^x f(t)\,dt+\frac{1}{x}f(x)$

$=\frac{-1}{x^2}\int_0^x f(t)\,dt+\frac{1}{x}\left(\frac{\text{Arctan}(x)}{x}\right)$

$x^2g'(x)=\text{Arct}(x)-\int_0^x f(t)\,dt$

ب - تحقق أن $x h'(x) = \frac{x}{1+x^2} - \arctan(x)$ لكل x من $]0;+\infty[$:

لدينا $\forall x\in]0;+\infty[; h(x) = x^2 g'(x)$

يعني أن $h(x) = \arctan(x) - \int_0^x f(t)\,dt$

إذن $h'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{\arctan(x)}{x}$

$$\boxed{x h'(x) = \frac{x}{1+x^2} - \arctan(x)}$$

ج - استنتج أن $g'(x)<0$ لكل x من $]0;+\infty[$ ثم ضع جدول تغيرات g :

لدينا حسب السؤال 3 - أ -

$\forall x\in]0;+\infty[; \arctan(x) \geq \frac{x}{1+x^2}$

إذن $\frac{x}{1+x^2} - \arctan(x) \leq 0$

يعني أن $\forall x\in\mathbb{R}^+_* ; x h'(x) \leq 0$

إذن $\forall x\in\mathbb{R}^+_* ; h'(x)\leq 0$

ولدينا $h(0) = 0^2 \times g'(0) = 0$

x	0	$+\infty$
$h(x)$	0	$\searrow$

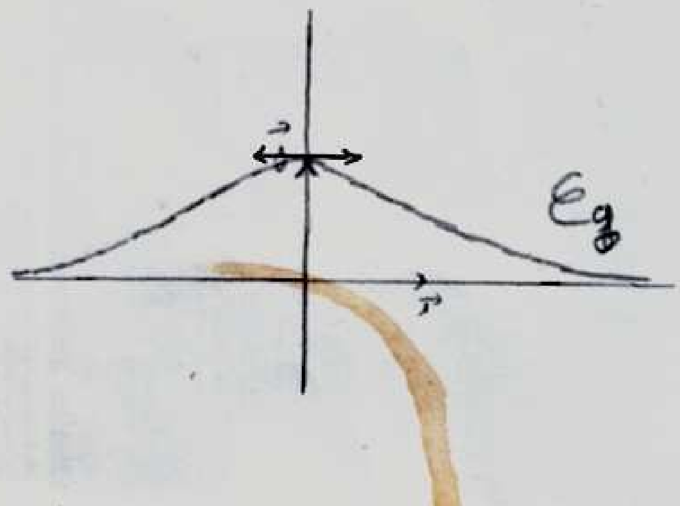
إذن $\forall x\in\mathbb{R}^+_* \ h(x)<0$

ولدينا $\forall x\in\mathbb{R}^+_* ; h(x) = x^2 g'(x)$

إذن $\boxed{\forall x\in\mathbb{R}^+_* \ g'(x)<0}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

5 رسم المنحنى :



الجزء (3)

1 أ. بين أن $\forall x\in\mathbb{R}^+_* ; f(x)\leq g(x) < 1$

لدينا حسب السؤال 3 - أ. الجزء (1) : $x>0$

$\frac{\arctan(t)}{t} \geq \frac{1}{1+t^2} ; t\in[0;x]$

$\int_0^x \frac{\arctan(t)}{t}dt \geq \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt ; t\in[0;x]$

يعني أن $\int_0^x \frac{\arctan(t)}{t}dt \geq \arctan(x)$

إذن $\frac{1}{x}\int_0^x \frac{\arctan(t)}{t}dt \geq \frac{\arctan(x)}{x} ; x>0$

$\Longleftarrow \quad \forall x>0 ; g(x)\geq f(x)$

ولدينا انطلاقا من جدول تغيرات g :

$\forall x\in\mathbb{R}^+_* ; g(x)<1$

إذن $\forall x\in\mathbb{R}^+_* \ f(x)\leq g(x) < 1$

ب - استنتج أن : $|g'(x)| \leq \frac{1}{x}(1-f(x)) ; x>0$

لدينا حسب 4 - أ -

$\forall x\in]0;+\infty[; g'(x) = \frac{1}{x}\left(f(x)-g(x)\right)$

$|g'(x)| = \frac{1}{x}|f(x)-g(x)| \ , \forall x>0$

ولدينا حسب السؤال السابق : $\forall x\in\mathbb{R}^+_* \ f(x)\leq g(x)$

إذن $|g'(x)| = \frac{1}{x}(g(x)-f(x)) ; \forall x>0$

ولدينا أيضا حسب السؤال السابق $g(x)\leq 1 / \forall x>0$

إذن $\frac{1}{x}(g(x)-f(x)) \leq \frac{1}{x}(1-f(x)) ; \forall x>0$

إذن $\forall x\in\mathbb{R}^+_* \ |g'(x)|\leq \frac{1}{x}\left(1-f(x)\right)$

ج - تحقق أن :

$\forall x\in\mathbb{R}^* : \frac{1}{x}\left(1-f(x)\right) = \frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}dt$

لدينا $\frac{1}{x^2}\int_0^x\frac{t^2}{1+t^2}dt = \frac{1}{x^2}\left(\int_0^x 1 - \frac{1}{1+t^2}dt\right)$

$= \frac{1}{x^2}\left[t-\arctan(t)\right]_0^x = \frac{1}{x} - \frac{\arctan(x)}{x^2}$

إذن $\forall x\in\mathbb{R}^+ : \frac{1}{x}(1-f(x)) = \frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}dt$

لأن $\left[\frac{1}{x}(1-f(x)) = \frac{1}{x}\left(1-\frac{\arctan(x)}{x}\right)\right]$

2 أ- بين أن : $\forall t\in\mathbb{R}_+^*\ \ 0 \le \frac{t}{1+t^2} \le \frac{1}{2}$

لدينا $\forall t\in\mathbb{R}_+^*\ \ (t-1)^2 \ge 0 \Rightarrow t^2+1 \ge 2t$

إذن $\frac{1}{t^2+1} \le \frac{1}{2t} \Rightarrow \frac{t}{t^2+1} \le \frac{1}{2}$

ونعلم أن $\forall t\in\mathbb{R}_+^*\ \ \frac{t}{1+t^2} \ge 0$

إذن $\forall t\in\mathbb{R}_+^*\ \ 0 \le \frac{t}{1+t^2} \le \frac{1}{2}$

ب - استنتج أن $\forall x\in\mathbb{R}_+^*\ \ |g'(x)| \le \frac{1}{4}$

ليكن x من $\mathbb{R}_+^*$:

انطلاقا من 1-ب و 2-ج نستنتج أن

$$|g'(x)| \le \frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}\,dt$$

ولدينا حسب السؤال السابق :

$$\forall t\in[0;x]\ \ 0 \le \frac{t^2}{1+t^2} \le \frac{1}{2}t$$

$t\in[0;x]\ ;\ \int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}\,dt \le \frac{1}{2}\int_0^x t\,dt$

إذن $\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}\,dt \le \frac{1}{4}x^2$

يعني أن $\frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}\,dt \le \frac{1}{4}$

إذن $\forall x\in\mathbb{R}_+^*\ \ |g'(x)| \le \frac{1}{4}$

3 - بين أن $g(x)=x$ تقبل حلا وحيدا في $[0;1]$

نضع $h(x)=g(x)-x$

$x \to h(x)$ ق. للاشتقاق على $]0;1[$

$h'(x)=g'(x)-1<0$; h تناقصية قطعا على $]0;1[$

ولدينا $h(0)=1$ و $h(1)=g(1)-1$

ولدينا $\forall x\in[0;1]\ g(x)\le 1$

إذن $h(1)=g(1)-1\le 0$

إذن $h(0)\times h(1)\le 0$ و $x\to h(x)$ متصلة على $[0;1]$ وقابلة للاشتقاق عليه.

إذن $\exists!\,\alpha\in[0;1]\ ;\ g(\alpha)=\alpha$

4 أ- بين أن $\forall n\in\mathbb{N}\ \ 0\le u_n\le 1$

من أجل $n=0$ لدينا $V:\ 0\le u_0=0\le 1$

نفترض أنه $1\ge u_n\ge 0$ ولنبين أن $0\le u_{n+1}\le 1$

لدينا $0\le u_n\le 1$ و g تناقصية ومتصلة على $[0;1]$

إذن $g(1)\le g(u_n)\le g(0)$

إذن $0\le u_{n+1}\le 1$

إذن حسب البرهان بالترجع فإن $\forall n\in\mathbb{N};\ 0\le u_n\le 1$

ب - بين أن $\forall n\in\mathbb{N}:\ |u_{n+1}-\alpha|\le\frac{1}{4}|u_n-\alpha|$

لدينا $0\le u_n\le 1$ و $\alpha\in[0;1]\ g(\alpha)=\alpha$; g ومتصلة على $[0;1]$ و ق. الاشتقاق عليه

إذن بتطبيق TAF على مجال طرفاه α و u_n

نجد أن $|g(u_n)-g(\alpha)|=|g'(c)|\,|u_n-\alpha|$

حيث أن $c\in]0;1[$

ونعلم أن $\forall x\in\mathbb{R}_+^*\ \ |g'(x)|\le\frac{1}{4}$

إذن $c\in]0;1[\ \ |g'(c)|\le\frac{1}{4}$

إذن $\forall n\in\mathbb{N};\ |g'(c)|\,|u_n-\alpha|\le\frac{1}{4}|u_n-\alpha|$

ولدينا $\forall n\in\mathbb{N};\ |g(u_n)-g(\alpha)|=|g'(c)|\,|u_n-\alpha|$

إذن $|u_{n+1}-\alpha|\le\frac{1}{4}|u_n-\alpha|\ ;\ \forall n\in\mathbb{N}$

ج - استنتج نهاية u_n وبين أنها متقاربة

لنبين أولا أن $\forall n\in\mathbb{N}\ ;\ |u_n-\alpha|\le\left(\frac{1}{4}\right)^n$

من أجل $n=0$ لدينا $|u_0-\alpha|\le 1$

وهذا صحيح لأن $(\alpha;u_0)\in[0;1]^2$

نفترض أن $|u_n-\alpha|\le\left(\frac{1}{4}\right)^n$

ولنبين أن $|u_{n+1}-\alpha|\le\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$

لدينا $|u_n-\alpha|\le\left(\frac{1}{4}\right)^n$

إذن $\frac{1}{4}|u_n-\alpha|\le\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$

إذن $|u_{n+1}-\alpha|\le\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$

إذن حسب افتراض الترجع فإن $\forall n\in\mathbb{N}\ ;\ |u_n-\alpha|\le\left(\frac{1}{4}\right)^n$

وبما أن $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=0\ ;\ \left|\frac{1}{4}\right|<1$

فإن $\lim_{n\to+\infty} u_n-\alpha=0$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n=\alpha}$$

إذن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متقاربة.

أسئلة مستقلة

1 - حدد نهاية المتتالية $(u_n)_{n>0}$ المعرفة كالتالي:

$$u_n = \frac{1}{n^{p+1}} \sum_{k=1}^{n} k^p$$

لدينا

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^p$$

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

حيث $f(x) = x^p$

f دالة متصلة وق. للاشتقاق على $]0;1[$

إذن $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \int_0^1 x^p \, dx = \left[\frac{x^{p+1}}{p+1}\right]_0^1$

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{p+1}$$

2 - ليكن z و z' من $\mathbb{C}$ بين أن

$$|z+z'|^2 \leq (1+|z|^2)(1+|z'|^2)$$

نعلم أن: $|z+z'| \leq |z| + |z'|$

$$|z+z'|^2 \leq |z|^2 + |z'|^2 + 2|z \times z'|$$

ولدينا $(1+|z|^2)(1+|z'|^2) = 1 + |z|^2 + |z'|^2 + |zz'|^2$

نعلم أن $(|zz'| - 1)^2 \geq 0$

إذن $|zz'|^2 + 1 \geq 2|z \cdot z'|$

$$|zz'|^2 + 1 + |z| + |z'| \geq 2|z \times z'| + |z|^2 + |z'|^2$$

إذن $|z+z'|^2 \leq (1+|z|^2)(1+|z'|^2)$

3 - بين أنه إذا كان $|z| = 1$ فإن

$$|1+z| \geq 1 \text{ أو } |1+z^2| \geq 1$$

لدينا $|z| = 1$ إذن $\exists \theta \in]-\pi;\pi] ; z = e^{i\theta}$

ولدينا $|1+z| = |1+e^{i\theta}| = \left|2\cos\frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}}\right|$

إذن

$$|1+z| = 2\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|$$

إذا كان $\theta \in \left[-\frac{2\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right]$ أي أن $\frac{\theta}{2} \in \left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right]$

فإن $\left|\cos\frac{\theta}{2}\right| \geq \frac{1}{2}$ ومنه فإن $|1+z| \geq 1$

وإذا كان $\theta \notin \left[-\frac{2\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right]$ فإن

$\cos\theta \leq -\frac{1}{2}$ أي أن $|\cos\theta| \geq \frac{1}{2}$

ولدينا $|1+z^2| = |1+e^{2i\theta}|$

$$|1+z^2| = |2\cos\theta \, e^{i\theta}| = 2|\cos\theta|$$

ولدينا $\forall \theta \in \left]-\pi;-\frac{2\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{2\pi}{3};\pi\right] ; |\cos\theta| \geq \frac{1}{2}$

إذن $|1+z^2| \geq 1$

خلاصة:

$|z| = 1 \Rightarrow |1+z| \geq 1$ أو $|1+z^2| \geq 1$

من انجاز:

- مهدي بنكروم
- وليد حفيظ الدين

"بإشراف الأستاذ العاني"