الثانية ع ر ب
المدة الزمنية : ساعتان

فرض محروس
الرياضيات

nisse groupe scolaire

تمرين 1 (5نقط)

1-أ- ليكن p عددا أوليا بحيث $p \succ 2$ أثبت أن $\forall k \in \{1,2,...,p-1\}: p/C_p^k$

ب- استنتج أن $\forall x \in Z : x \equiv 1[p] \Rightarrow x^p \equiv 1[p^2]$

2-أ- حل في Z^2 المعادلة $(E): 23x - 840y = 1$

ب- أوجد الزوج (d,e) الوحيد الذي يحقق (E) و $0 \le e \prec 23$ و $0 \le d \prec 840$

3- فكك 2009 إلى جداء عوامل أولية

4- ليكن a من Z بحيث $a \wedge 2009 = 1$

أ- بين أن $a^{40} \equiv 1[41]$ و $a^6 \equiv 1[7]$

ب- بين أن $\forall x \in Z : x \equiv 1[7] \Rightarrow x^7 \equiv 1[7^2]$ و استنتج أن $a^{42} \equiv 1[7^2]$

ج- تحقق أن : $840 = 42 \vee 40$ و استنتج أن $\begin{cases} a^{840} \equiv 1[41] \\ a^{840} \equiv 1[7^2] \end{cases}$

د- بين أن $a^{840} \equiv 1[2009]$

تمرين 2 (5نقط)

نرمز ب $D(IR)$ لمجموعة الدوال القابلة للاشتقاق على IR نعتبر المجموعة :

$$E = \left\{ f \in D(IR) / \forall x \in IR : f'(x) - f(x) = 2\int_0^x f(t)dt \right\}$$

1- بين أن $(E,+,.)$ فضاء متجهي حقيقي

2- حل المعادلة التفاضلية $y'' - y' - 2y = 0$

3- بين أن : $f \in E \Leftrightarrow \forall x \in IR : f''(x) - f'(x) - 2f(x) = 0$

4- نعتبر الدالتين العدديتين المعرفتين بما يلي : $\forall x \in IR : \varphi_2(x) = e^{2x}, \varphi_1(x) = e^{-x}$

أ- بين أن : $\varphi_1 \in E$ و $\varphi_2 \in E$

ب- بين أن $(\varphi_1;\varphi_2)$ أساس للفضاء المتجهي $(E,+,.)$

ج- حدد زوج إحداثيات دالة f من E في الأساس $(\varphi_1;\varphi_2)$

تمرين 3 (6نقط)

يحتوي كيس على 3 كرات سوداء و كرة بيضاء (متشابهة في اللمس). نعتبر التجربة التالية : نرمي قطعة نقدية متزنة مرة واحدة في الفضاء، إذا سقطت على ظهرها نضيف كرة بيضاء إلى الكيس و إذا سقطت على وجهها نضيف كرة سوداء إلى الكيس ثم نسحب تآنيا ثلاث كرات من الكيس

1- E_0 الحدث " الكرات الثلاث المسحوبة سوداء " و B الحدث " القطعة النقدية سقطت على وجهها "

أ- أحسب $p(E_0 \cap B)$ و $p(E_0 \cap \overline{B})$ ثم $p(E_0)$

ب- علما أن الكرات المسحوبة سوداء ما هو الاحتمال أن تكون القطعة النقدية سقطت على ظهرها ؟

2- E_1 الحدث " توجد كرة بيضاء واحدة من بين الكرات الثلاث المسحوبة "

أ- أحسب احتمال الحدث E_1

ب- نعيد التجربة أربع مرات متتالية. ما هو احتمال تحقيق الحدث E_1 على الأقل مرة واحدة ؟

تمرين 4 (4نقط)

ليكن a عددا عقديا مخالفا للعدد العقدي $1+i$.

1) أ- أنشر العدد $(ia-1-i)^2$.

ب- حل في مجموعة الأعداد العقدية المعادلة ذات المجهول z التالية : $z^2 - 2(a+1-i)z + 2a^2 - 4i$

2) في المستوى العقدي المنسوب لمعلم متعامد ممنظم مباشر ، نعتبر النقطتين A و B التي لحقاهما على التوالي هما : $(1+i)a$ و $(1-i)a+2$ وليكن I منتصف القطعة $[AB]$

ونعتبر التطبيق R الذي يربط كل نقطة M من المستوى لحقها z بالنقطة M' التي لحقها z' بحيث : $z' = -iz + 4$

أ - بين أن R دوران محددا مركزه Ω وزاويته .

ب - تحقق من أن $R(A) = B$ واستنتج أن المستقيمين (ΩI) و (AB) متعامدان .

ج - ليكن α عددا حقيقيا . نضع $a = \alpha(1+i) - 2i$ ولتكن C النقطة التي لحقها a . بين أن النقط A و B و C مستقيمية .