تم تحميل هذا الملف من موقع Talamidi.com

مادة الرياضيات
الإمتحان التجريبي الثاني
دورة أبريل 2013

مدة الإنجـــاز: 4 ساعات
الثانية باك ع-رياضية
2013/04/24

التمرين الأول: (4 ن)

A - نعتبر المجموعة $G=\mathbb{R}-\{\sqrt{3}\}$ لكل a و b من G تضع : $a*b=a+b-\frac{ab}{\sqrt{3}}$.

1) تحقق من أن $\forall (a,b)\in G^2\ a*b=\sqrt{3}-\sqrt{3}(\frac{a}{\sqrt{3}}-1)(\frac{b}{\sqrt{3}}-1)$ — 0,5

2) بين أن $(G,*)$ زمرة تبادلية. — 1

B نعتبر المجموعة $E=\left\{M(a)=\frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}2\sqrt{3}-a & a\\ a & 2\sqrt{3}-a\end{pmatrix}/a\in G\right\}$, و المصفوفتين $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ و $J=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

1) أ- تحقق من أن $J^2=-2J$ و أن $\forall a\in G, M(a)=I+\frac{a}{2\sqrt{3}}J$ — 0,5

ب- بين أن المجموعة E جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}),\times)$. — 0,5

2) نعتبر التطبيق $f:G\to E$; $a\mapsto M(a)$

أ- بين أن f تشاكل تقابلي من $(G,*)$ نحو $(E,\times)$. — 1

ب- استنتج بنية $(E,\times)$. — 0,5

التمرين الثاني (3.5 ن)

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية (E) : $z^2-az+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=0$ حيث a عدد عقدي. وليكن z_0 و z_1 حلي المعادلة (E).

1) بين ان $\arg z_0+\arg z_1\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$ وأن $|z_0||z_1|=1$ — 0,25

2) أ- نضع $z_0=\cos\theta+i\sin\theta$ (θ عدد حقيقي) بين أن: $a=2\cos(\theta-\frac{\pi}{6})e^{i\frac{\pi}{6}}$ — 0,5

ب- استنتج أنه إذا كان $z_0=i$ فإن $1+ia-a^2-ia^3+a^4+ia^5=0$ — 0,5

3) نفترض أن $z_0=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$

أ- حدد العدد z_1 على شكليه المثلثي والجبري ثم استنتج قيمتي $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$. — 0,5

ب- حدد العدد a على شكليه المثلثي والجبري — 0,5

4) نعتبر ،في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$، النقط A و M_0 و M_1 التي ألحاقهما على التوالي هي: a و z_0 و z_1 حيث $z_0=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$.

ليكن التحويل R الذي يحول كل نقطة $M(z)$ إلى $M'(z')$ بحيث : $z'=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)z$

أ- حدد طبيعة والعناصر المميزة للتحويل R. — 0,25

ب- بين ان $R(M_0)=M_1$ ثم استنتج طبيعة OM_0AM_1 — 0,5

ج- استنتج عمدة ومعيار العدد العقدي a. — 0,5

التمرين الثالث: (2,5 ن)

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $(F)\quad x^4+781=3y^4$

1) أ- بين أن لكل x من $\mathbb{Z}$: $x^4\equiv 1[5]$ او $x^4\equiv 0[5]$ — 0,5

ب- بين أن لكل x من $\mathbb{Z}$. $x^4+781\equiv 2[5]$ او $x^4+781\equiv 1[5]$ — 0,5

ج- استنتج مجموعة حلول المعادلة (F). — 0,75

2) هل يوجد عددين صحيحين طبيعيين x و y بحيث $\overline{10000}_{(x)}+\overline{781}_{(10)}=\overline{30000}_{(y)}$ ؟ — 0,75

تم تحميل هذا الملف من موقع Talamidi.com

مسألة (10 ن)

A - نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$ $=D$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=(x+1)\ln(1+\frac{1}{x}) & x\in D-\{-1\} \\ f(-1)=0 \end{cases}$$

ليكن (C_f) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(o,\vec{i},\vec{j})$

1- أ- احسب $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$. — 0,25

ب- بين ان الدالة f متصلة في -1 على اليسار . — 0,25

ج- أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليسار في -1 ثم أعط تأويلا هندسيا لذلك . — 0,50

2 - أ- بين ان : $(\forall t\in]-1,+\infty[)\quad \frac{t}{1+t}\le \ln(1+t)\le t$ — 0,50

ب- استنتج أن : $(\forall x\in]0,+\infty[)\quad 1\prec f(x)\prec\frac{x+1}{x}$ — 0,50

وان: $(\forall x\in]-\infty,-1[)\quad \frac{x+1}{x}\prec f(x)\prec 1$

ج- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ثم استنتج الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f) — 0,50

3- أدرس تغيرات الدالة f . — 0,50

4- أنشىء المنحنى (C_f) . — 0,50

5- ليكن λ عددا حقيقيا بحيث $0<\lambda<1$ و $A(\lambda)$ مساحة الحيز المحصور بين المنحنى (C_f) و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتهما $x=1$ و $x=\lambda$. — 0,50

أحسب $A(\lambda)$ بدلالة λ .

B- نعتبر الدالة g المعرفة علي المجال $I=]0,+\infty[$ بما يلي : $g(x)=e^{(x+1)\ln(1+\frac{1}{x})}$

1- أحسب النهايات عند محدات مجموعة تعريف الدالة g — 0,50

2- أ- احسب $g'(x)$ $(\forall x\in]0,+\infty[)$. — 0,50

ب- ضع جدول تغيرات الدالة g . — 0,50

3 - أ- بين ان : $(\forall x\in]0,+\infty[)\quad e^{x\ln(1+\frac{1}{x})}<e$ — 0,50

ب- استنتج أن : $(\forall x\in]0,+\infty[)\quad e\prec g(x)\prec e+\frac{e}{x}$ — 0,50

4- نعتبر المتتاليتين $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرفتين بما يلي :

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*)\begin{cases} u_n=(1+\frac{1}{n})^{n+1} \\ v_n=(1+\frac{1}{n})^n \end{cases}$$

أ- بين أن : — 0,25

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*)\begin{cases} \ln u_n=f(n) \\ \ln v_n=f(-1-n) \end{cases}$$

ب - بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N})\quad v_n<e<u_n$ — 0,50

ج - بين أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتاليتان متحاديتان واحسب نهايتهما . — 0,50

C- نعتبر الدالة F المعرفة على $]1,+\infty[$ بمايلي : $F(x)=\frac{1}{x-1}\int_1^x g(t)dt$

1- بين أن : $(\forall x>1)\quad F(x)-g(x)\ge 0$ — 0,50

2- احسب $\lim\limits_{x\to 1^+} F(x)$ — 0,25

3 - أ- بين ان : $(\forall x>1)\quad g(x)\le F(x)\le e+\frac{e\ln x}{x-1}$ — 0,50

ب- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ — 0,25

4- أحسب : $(\forall x>1)\quad F'(x)$ وأعط جدول تغيرات F — 0,75