| المادة: الرياضيات<br>الشعبة: 2 علوم رياضية | الموضوع: تصحيح الفرض رقم 2 الدورة II | الأستاذ:<br>المانتي |
|---|---|---|

## التمرين الأول: الأعداد العقدية

1- أ- لدينا:

$(E)\ \frac{1}{2} z^3 - (1+i) z^2 + 2(1+i) z - 4i = 0$

و $z_0 = 2i$

نتحقق أن $z_0$ حل للمعادلة $(E)$

$\frac{1}{2}(z_0)^3 - (1+i) z_0^2 + 2(1+i) z_0 - 4i$

$= \frac{1}{2}(2i)^3 - (1+i)\cdot(2i)^2 + 2(1+i)\cdot 2i - 4i$

$= -4i + 4(1+i) + 4i(1+i) - 4i$

$= -4i + 4 + 4i + 4i - 4 - 4i$

$= 0$

وعليه $z_0$ حل للمعادلة $(E)$

ب- لدينا: $(z-2i)(\frac{1}{2} z^2 + \alpha z + \beta)$

$= \frac{1}{2} z^3 + (\alpha - i) z^2 + (\beta - 2i\alpha) z - 2i\beta$

$\begin{cases} \alpha - i = -1 - i \\ \beta - 2i\alpha = 2 + 2i \\ -2i\beta = -4i \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 2 \end{cases}$

وعليه $(E)$ تصبح: $\frac{1}{2} z^2 - z + 2 = 0$ أو $z = 2i$

$\Delta = -3$

اذن للمعادلة $\frac{1}{2} z^2 - z + 2$ حلين

$z_1 = 1 - i\sqrt{3}$

$z_2 = 1 + i\sqrt{3}$

وعليه $S_E = \{2i, 1 - i\sqrt{3}, 1 + i\sqrt{3}\}$

2) أ- لدينا: $\frac{z_C}{z_A} = \frac{2i}{1 + i\sqrt{3}}$

$\frac{z_C}{z_A} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i$

$\left|\frac{z_C}{z_A}\right| = 1$ و $\arg\left(\frac{z_C}{z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$

اذن: $OA = OC$ و $\arg\left(\frac{z_C}{z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$

أي $OA = OC$ و $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$

ف $OAC$ متساوي الساقين في $O$

و $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$

ب- لحق $D$ منتصف $[AC]$ هو:

$d = \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}+2}{2} i$

$D$ منتصف $[AC]$ و $OAC$ متساوي الساقين

$(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OC}) \equiv \frac{1}{2} (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})\ [2\pi]$

$(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OC}) \equiv \frac{\pi}{12}\ [2\pi]$

$\arg(d) \equiv (\vec{u}, \overrightarrow{OD})\ [2\pi]$

$\equiv (\vec{u}, \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD})\ [2\pi]$

$\equiv \arg c - \frac{\pi}{12}\ [2\pi]$

$\equiv \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\ [2\pi]$

$\arg(d) \equiv \frac{5\pi}{12}\ [2\pi]$

ج- قيمة: $\cos\frac{5\pi}{12}$ و $\sin\frac{5\pi}{12}$

$\arg(d) \equiv \frac{5\pi}{12}\ [2\pi]$

$\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{Re(d)}{|d|}$

$\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{Im(d)}{|d|}$

لدينا $|d| = \sqrt{2+\sqrt{3}}$

$\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+2}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

$\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

3) أ - لدينا: $O' = R_1(A, -\frac{\pi}{2})$

إذن: $z'_O - z_A = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z_O - z_A)$

$z_{O'} = -i(-z_A) + z_A$

منه: $z_{O'} = i(1+i\sqrt{3}) + 1 + i\sqrt{3}$

وعليه: $z_{O'} = (1-\sqrt{3}) + i(1+\sqrt{3})$

لدينا: $B' = R_2(A, \frac{\pi}{2})$

$b' - z_A = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_B - z_A)$

$b' = i(1 - i\sqrt{3} - 1 - i\sqrt{3}) + 1 - i\sqrt{3}$

وعليه: $b' = (2\sqrt{3}+1) + i\sqrt{3}$

د- $I$ منتصف $[OB]$ إذن: لدينا:

$z_I = \frac{z_O + z_B}{2} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

لدينا: $\frac{z_A - z_I}{z_{O'} - z_{B'}}$

إذن: $= \frac{1 + i\sqrt{3} - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+2\sqrt{3}+i\sqrt{3} - 1 + \sqrt{3} - i - i\sqrt{3}}$

منه: $= \frac{\frac{i}{2}(3\sqrt{3} - i)}{3\sqrt{3} - i} = \frac{1}{2} i \in i\mathbb{R}$

وعليه: $(O'B') \perp (AI)$

منه $(AI)$ ارتفاع للمثلث $AO'B'$

## التمرين الثاني: الحسابيات

1) أ- $a^2 + 1 \equiv 0[p]$

$(\exists k \in \mathbb{R})\ a^2+1 = kp$

$pk - a\times a = 1$

وحسب بوزو فإن: $a\wedge p = 1$

و $p$ أولي. حسب فيرما فإن:

$a^p \equiv a[p]$

$p / a(a^{p-1} - 1)$

كما أن $p\wedge a = 1$ فإن:

$p / a^{p-1} - 1$

وعليه $a^{p-1} \equiv 1[p]$

ب) لكل عدد $x$ من $\mathbb{Z}$ لدينا:

$x \equiv 1[4]$    $x\equiv 0[4]$

$x\equiv 3[4]$    $x\equiv 2[4]$

لدينا $x \equiv 0[4] \Leftrightarrow 4/x$

$x$ زوجي $\Leftrightarrow x\equiv 2[4]$

بما أن $p$ أولي فإن:

$p\equiv 3[p]$ أو $p\equiv 1[4]$

نفترض أن: $p\equiv 3[4]$

إذن: $p = 4k+3$

وحسب ما سبق $a^{p-1}\equiv 1[p]$

(1) $a^{4k+2}\equiv 1[p]$

ومن جهة لدينا: $a^2 \equiv -1[p]$

(2) $(a^2)^{2k+1} \equiv -1[p]$

من (1) و(2) لدينا: $1\equiv -1[p]$

وهذا غير صحيح لأن $p\geq 3$

وبالتالي فإن: $p\equiv 1[4]$

ج) 1- لدينا: $3\notin A$ (لأن $3\not\equiv 1[4]$)

$\Leftarrow$ $3\wedge(p_k) = 1$ $(\forall p_k\in A)$

$3\wedge\left(\prod_{p_k\in A} p_k\right) = 1$

ولدينا: $3\wedge 2 = 1$

$\Leftarrow$ $3\wedge\left(2\prod_{p_k\in A} p_k\right) = 1$

وعليه حسب فيرما فإن:

$\left(2\prod_{p_k\in A} p_k\right)^{3-1}\equiv 1[3]$

$\left(2\prod_{p_k\in A} p_k\right)^2 \equiv 1[3]$

ومنه $n\equiv 2[3]$

$\Leftarrow$ 3 لا يقسم $n$.

ب- ليكن $p$ أولي و $p/n$

لدينا $p \neq 3$ لأن 3 لا يقسم $n$

$n \equiv 0 [p]$

$a^2+1 \equiv 0 [p]$

$(a = 2\prod p_k)$

وحسب نتيجة السؤال (1) فإن:

$p \equiv 1 [4]$

ج) نفترض أن المجموعة $A$ منتهية

ونضع: $A = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$

ونعتبر العدد $n = \left(2\prod_{j=1}^{m} p_j\right)^2+1$

لدينا: $n \neq p_1, p_2, \dots, p_m$

لنتحقق أن: "$p_k$ لا يقسم $n$" $\forall k \in \{1, \dots, m\}$

نفترض أن: $p_k / n$

ولدينا: $p_k / 2\prod_{j=1}^{m} p_j$

$p_k / n$ و $p / \left(2\prod_{j=1}^{m} p_j\right)^2$

وعليه $p_k / 1$ وهذا غير ممكن

$\Leftarrow$ $p_k$ لا يقسم $n$.

نفترض أن $n$ غير أولي

$\Leftarrow$ $n$ يقبل قاسم أولي $p$.

وحسب ماسبق فإن $p \equiv 1 [4]$

إذن $p \in A$ $\Leftarrow$ تناقض

$\Leftarrow$ $n$ أولي و $n = 4\left(\prod_{j=1}^{m} p_j\right)+1$

أي $n \in A$ . يتناقض مع $A$ منتهية .

إذن: المجموعة $A$ غير منتهية.

## التمرين 3 : دراسة دالة.

1) $\forall x \in ]0,+\infty[ \quad f_n(x) = x - n\ln x$

أ- $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x - n\ln x$

لدينا: $\lim_{x\to 0^+} x = 0$ , $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$

إذن:

$\lim_{x\to 0^+} f_n(x) = +\infty$

$\lim_{x\to +\infty} f_n(x) = \lim_{x\to +\infty} x - n\ln x$

$= \lim_{x\to +\infty} x\left(1 - n\frac{\ln x}{x}\right)$

بما أن: $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

فإن: $\lim_{x\to +\infty} 1 - n\frac{\ln x}{x} = 1$

وعليه: $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

ب- $f_n'(x) = (x - n\ln x)'$

$= 1 - \frac{n}{x} = \frac{x-n}{x}$

إذن إشارة $f_n'(x)$ هي إشارة $x-n$

| $x$ | $0$ | $n$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f_n$ | $+\infty$ ↘ | $n(1-\ln n)$ | ↗ $+\infty$ |

2) لتكن: $g = f_n|_{]0,n]}$ قصور $f_n$ على $]0,n]$

$g$ متصلة وتناقصية قطعا على $]0,n]$

$\Leftarrow$ $g$ تقابل من $]0,n]$ نحو $[n(1-\ln n), +\infty[$

بما أن: $n \geq 3$ فإن: $\ln n \geq 1$

أي أن: $n(1-\ln n) < 0$

$0 \in [n(1-\ln n), +\infty[$

وعليه: $g(u_n) = 0 \quad (\exists! u_n \in ]0,n])$

$f_n(u_n) = 0 \quad (\exists! u_n \in ]0,n])$

ولتكن $h = f_n|_{]n,+\infty[}$ قصور $f_n$ على $]n,+\infty[$

$h$ متصلة وتزايدية قطعا على $]n,+\infty[$

$h$ تقابل من $]n,+\infty[$ نحو $]n(1-\ln n),+\infty[$

وبما أن: $0\in ]n(1-\ln n),+\infty[$

فإن: $(\exists! V_n \in ]n,+\infty[)\ h(V_n)=0$

$(\exists! V_n\in ]n,+\infty[)\ f_n(V_n)=0$

3) أ- لدينا $U_n$ هو حل المعادلة $f_n(x)=0$

على المجال $]0,n[$ و $U_n$ وحيد ينتمي

إلى $]0,n[$. مع $f_n(1)=1>0$

$f_n(e)=e-n<0$ $(n\geq 3>e)$

منه

$f_n(e)<0<f_n(1)$

أي $f_n(e)<f_n(U_n)<f_n(1)$

و $f_n$ تناقصية على $]0,n[$

إذن: $1<U_n<e$ $(\forall n\geq 3)$

ب- لدينا: $f_n(U_{n+1})=U_{n+1}-n\ln(U_{n+1})$

$=U_{n+1}-(n+1)\ln U_{n+1}+\ln(U_{n+1})$

$=f_{n+1}(U_{n+1})+\ln(U_{n+1})$

(لأن $f_{n+1}(U_{n+1})=0$)

منه: $f_n(U_{n+1})=\ln U_{n+1}$

⇐ استنتاج:

لدينا $U_{n+1}>1 \Rightarrow \ln(U_{n+1})>0$

أي $f_n(U_{n+1})>0=f_n(U_n)$

و $U_n$ و $U_{n+1}$ ينتميان لـ $]1,e[$

وبما أن، $f_n$ تناقصية على

$]1,e[\subset ]0,n[$

فإن: $U_{n+1}<U_n$

⇐ $(U_n)_{n\geq 3}$ تناقصية.

ج- $f_n(U_n)=0 \Rightarrow U_n=n\ln U_n$

بما أن: $1<U_n<e<3$

فإن: $1<n\ln U_n<3$

أي $\frac{1}{n}<\ln(U_n)<\frac{3}{n}$

منه $e^{\frac{1}{n}}<U_n<e^{\frac{3}{n}}$ $(\forall n\geq 3)$

4) لدينا، $V_n>n$ $(\forall n\geq 3)$

بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty$

فإن: $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n=+\infty$

⇐ لدينا $f_n(V_n)=0$

يعني أن $V_n=n\ln(V_n) \Leftrightarrow \ln V_n=\ln n+\ln(\ln V_n)$

وعليه

$$\frac{\ln V_n}{\ln n}=1+\frac{\ln(\ln V_n)}{\ln n}$$

⇐

$$\frac{\ln V_n}{\ln n}-\frac{\ln(\ln V_n)}{\ln n}=1$$

وعليه

$$\frac{\ln V_n}{\ln n}\left(1-\frac{\ln(\ln V_n)}{\ln V_n}\right)=1$$

⇐ تحديد: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln V_n}{\ln n}$

لدينا:

$$\frac{\ln V_n}{\ln n}=\frac{1}{1-\frac{\ln(\ln V_n)}{\ln V_n}}$$

بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n=+\infty$

فإن: $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(V_n)=+\infty$

منه $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(\ln V_n)}{\ln V_n}=0$

وعليه $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln V_n}{\ln n}=1$

5) أ- لدينا: $f_n(V_n)=0 \Leftrightarrow V_n=n\ln V_n$

بما أن، $V_n>n \Rightarrow \ln V_n>\ln n$

فإن: $n\ln(V_n)>n\ln n$

إذن: $V_n>n\ln n$ $(\forall n\geq 3)$

هذا انجاز التلميذة: سناء العلمي

ب- لدينا:

$f_n(n^2) = n^2 - n\ln(n^2)$

$= n^2 - 2n\ln n$

$= n(n - 2\ln n)$

$f_n(n^2) = n f_2(n) \quad (\forall n \geq 3)$

- استنتاج:

$f_2'(x) = \frac{x-2}{x} \Leftarrow f_2(x) = x - 2\ln x$

$f_2$ تزايدية على $[2, +\infty[$

بما أن: $n \geq 3$ فإن $f_2(n) \geq f_2(3)$

ومنه $f_2(n^2) > 0 = f_n(V_n)$

ولدينا $V_n$ و $n^2$ من $]n, +\infty[$

و $f_n$ تزايدية على $]n, +\infty[$

إذن: $n^2 > V_n \quad (\forall n \geq 3)$

ج- لدينا $V_n = n\ln(V_n)$ لأن $f(V_n) = 0$

وبما أن: $n^2 > V_n$ فإن: $2\ln(n) > \ln(V_n)$

أي أن: $2n\ln n \geq n\ln V_n$

ومنه $(\forall n \geq 3) \quad V_n \leq 2n\ln n$

د- لدينا:

$\frac{V_n}{n\ln n} = \frac{n\ln V_n}{n\ln n} = \frac{\ln V_n}{\ln n}$

(لأن: $V_n = n\ln(V_n)$)

لدينا $n\ln(n) < V_n < 2n\ln n$

$\ln n + \ln(\ln n) < \ln V_n < \ln(n) + \ln(2\ln(n))$

$1 + \frac{\ln(\ln n)}{\ln n} < \frac{\ln V_n}{\ln n} < 1 + \frac{\ln(2\ln n)}{\ln n}$

$1 + \frac{\ln(\ln n)}{\ln n} < \frac{V_n}{n\ln n} < 1 + \frac{2\ln(2\ln n)}{2\ln n}$

بما أن: $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(\ln n)}{\ln n} = \lim \frac{\ln(2\ln n)}{2\ln n} = 0$

فإن: $\lim_{n\to+\infty} \frac{V_n}{n\ln n} = 1$

من إنجاز التلميذة: سناء العـ...
ع-ع-ر-ع.