تصحيح الفرض المحروس رقم ②
الأسدس II

التمرين I :

$(E) : m^2Z^2 + m^3Z + 1 - im^2 = 0$

① أ- من أجل $m = -1$

$(E) : z^2 - z + 1 - i = 0$

$\Delta = 1 - 4(1-i) = -3+4i$

$\Delta = (2i+1)^2$

ليكن z_1 و z_2 حلي المعادلة (E)

$z_1 = \dfrac{1-(2i+1)}{2} = -i$

$z_2 = \dfrac{1+(2i+1)}{2} = 1+i$

ومنه: $S = \{-i, 1+i\}$

ب- لنحدد قيم m التي يكون من أجلها $u = 1+i$ حلا للمعادلة (E)

$\left(\text{حل للمعادلة } (E) \ u = 1+i\right) \Leftrightarrow (E') : (1+i)m^3 + im^2 + 1 = 0$

لدينا: $m=-1$ حل للمعادلة (E')

ومنه: $(E') \Leftrightarrow (m+1)\left((1+i)m^2 - m + 1\right) = 0$

لنحل المعادلة: $(1+i)m^2 - m + 1 = 0$

$\Delta = -3 - 4i = (2i-1)^2$

ومنه: $m = \dfrac{1-(2i-1)}{2(1+i)} = -i$

$m = \dfrac{1+(2i-1)}{2(1+i)} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$

وعليه قيم m التي من أجلها $u = 1+i$ حل للمعادلة (E) هي:

$m \in \left\{-1, -i, \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i\right\}$

في حالة $m=-1$ ((E) حلا المعادلة u' و u)

$u = 1+i$ و $u' = -i$

في حالة $m = -i$

$(E) \Leftrightarrow -z^2 + iz + 1 + i = 0$

$u_2 = -i - u_1 = -1$

ومنه:

$u = 1+i$ و $u' = -1$

في حالة $m = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$

$(E) \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}iz^2 + \dfrac{1}{4}(1+i)z + \dfrac{3}{2} = 0$

$u' = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} - 1 - i = -\dfrac{3}{4}(i+1)$

وعليه:

$u = 1+i$ و $u' = -\dfrac{3}{4}(i+1)$

② أ- لنتحقق أن مميز المعادلة (E) يكتب على الشكل:

$\Delta = m^2(m^2+2i)^2$

$\Delta = m^6 - 4(1-im^2)m^2$

$\Delta = m^2(m^4 - 4 + 4im^2)$

ومنه: $\Delta = m^2(m^2+2i)^2$

ب- ليكن z_1 و z_2 حلي المعادلة (E)

$z_1 = \dfrac{-m^3 - m(m^2+2i)}{2m^2} = -m - \dfrac{i}{m}$

$z_2 = \dfrac{-m^3 + m(m^2+2i)}{2m^2} = \dfrac{i}{m}$

③ أ-

$Z = \dfrac{m-a}{m-b} = \dfrac{m+m+\frac{i}{m}}{m-\frac{i}{m}} = \dfrac{2m^2+i}{m^2-i}$

$= \dfrac{2(m^2-i)+3i}{m^2-i} = 2 + \dfrac{3i}{m^2-i}$

$Z = \bar{Z} \Leftrightarrow 2 + \dfrac{3i}{m^2-i} = 2 - \dfrac{3i}{\bar{m}^2+i}$

$\Leftrightarrow \bar{m}^2 = -m^2$

$\Leftrightarrow 2\,\mathcal{Re}(m^2) = 0$

ومنه: $m^2 \in i\mathbb{R}$

إذن: $\arg(m^2) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ أو $\arg(m^2) \equiv -\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$

$2\arg(m) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ أو $2\arg(m) \equiv -\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$

وعليه:

$\arg(m) \equiv \dfrac{\pi}{4}[\pi]$ أو $\arg(m) \equiv -\dfrac{\pi}{4}[\pi]$

ب-

$\left(\text{نقط مستقيمية } M \text{ و } B \text{ و } A\right) \Leftrightarrow \dfrac{m-a}{m-b} \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow Z \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow Z = \bar{Z}$

$\Leftrightarrow \arg(m) \equiv \dfrac{\pi}{4}[\pi]$ أو $\arg(m) \equiv -\dfrac{\pi}{4}[\pi]$

$\Leftrightarrow \mathcal{Re}(m) = \mathcal{I}m(m)$ أو $\mathcal{Re}(m) = -\mathcal{I}m(m)$

نضع: $m = x + yi$ (M) $(x, y \in \mathbb{R})$

وعليه: مجموعة النقط $M(m)$ التي تكون من أجلها A و B و M نقط مستقيمية هي اتحاد المستقيمين:

$(D_1): y = x$

$(D_2): y = -x$.

4) أ.

لدينا R دوران مركزه $B(\frac{i}{m})$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$

$$A' = R(A) \iff a' = e^{i\frac{\pi}{2}}\left(a - \frac{i}{m}\right) + \frac{i}{m}$$
$$\iff a' = ai + \frac{1}{m} + \frac{i}{m}$$
$$\iff a' = -im + \frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \frac{i}{m}$$
$$\iff \boxed{a' = -im + \frac{i}{m} + \frac{2}{m}}$$

$$B' = R^{-1}(M) \iff R(B') = M$$
$$\iff e^{i\frac{\pi}{2}}\left(b' - \frac{i}{m}\right) + \frac{i}{m} = m$$
$$\iff b' - \frac{i}{m} = -im - \frac{1}{m}$$
$$\iff \boxed{b' = -im + \frac{i-1}{m}}$$

ب-

$$M' = R(M) \iff m' - \frac{i}{m} = e^{i\frac{\pi}{2}}\left(m - \frac{i}{m}\right)$$
$$\iff m' = mi + \frac{i+1}{m}$$

لدينا:
$$\frac{b' + m'}{2} = \frac{-mi + \frac{i-1}{m} + mi + \frac{i+1}{m}}{2}$$
$$= \frac{2i}{2m} = \frac{i}{m}$$
$$= b$$

وعليه: $B(b)$ هي منتصف القطعة $[B'M']$

ج- ليكن I منتصف القطعة $[AM]$ و z_I لحقها

$$z_I = \frac{m + a}{2} = \frac{-i}{2m}$$
$$\frac{b' - a'}{b - z_I} = \frac{-im + \frac{i-1}{m} + im - \frac{1}{m} - \frac{2}{m}}{\frac{i}{m} + \frac{i}{2m}}$$
$$= \frac{-3}{m} \times \frac{2m}{3i}$$
$$= 2i$$

$$(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{A'B'}) \equiv \arg\left(\frac{b' - a'}{b - z_I}\right) [2\pi]$$
$$\equiv \arg(2i) \ [2\pi]$$
$$\equiv \frac{\pi}{2} \ [2\pi]$$

د $(IB) \perp (A'B')$

ولدينا:
$$\left|\frac{b' - a'}{b - z_I}\right| = |2i| = 2$$

ومنه:
$$|b' - a'| = 2|b - z_I|$$

أي:
$$\boxed{A'B' = 2BI}$$

التمرين II :

1) أ- إذا كان n زوجي

$(\exists k \in \mathbb{Z}) / n = 2k \Rightarrow n^4 = 16k^4$

إذن: $n^4 \equiv 0 \ [16]$ (1)

إذا كان n فردي

$$(\exists k' \in \mathbb{Z}) / n = 2k' + 1 \Rightarrow n^4 = (2k+1)^2 (2k+1)^2$$
$$\Rightarrow n^4 = (4k^2 + 1 + 4k)^2$$
$$\Rightarrow n^4 = 16k^4 + 8k^2(1 + 4k) + (1 + 4k)^2$$
$$\Rightarrow n^4 = 16k^4 + 8k^2 + 32k^3 + 1 + 16k^2 + 8k$$
$$\Rightarrow n^4 = 16(k^4 + k^2 + 2k^3) + 8k(k+1) + 1$$

لدينا:
$$\begin{cases} 16(k^4 + k^2 + 2k^3) \equiv 0 \ [16] \\ 8k(k+1) \equiv 0 \ [16] \end{cases}$$
(جداء عددين متتابعين هو عدد زوجي $k(k+1) = 2q \ (\exists q \in \mathbb{Z})$)

إذن: $n^4 \equiv 1 \ [16]$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن:

$n^4 \equiv 0 [16]$ أو $n^4 \equiv 1 [16]$

2) $N = a^4 + b^4$ ، $a \wedge b = 1$

الحالة (1):
$$\begin{cases} a^4 \equiv 0 \ [16] \\ b^4 \equiv 1 \ [16] \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} a^4 \equiv 1 \ [16] \\ b^4 \equiv 0 \ [16] \end{cases}$$

وعليه:
$$a^4 + b^4 \equiv 1 \ [16]$$

أي:
$$N \equiv 1 \ [16]$$

الحالة (2):
$$\begin{cases} a^4 \equiv 1 \ [16] \\ b^4 \equiv 1 \ [16] \end{cases}$$

وعليه:
$$a^4 + b^4 \equiv 2 \ [16]$$

أي:
$$N \equiv 2 \ [16]$$

نستنتج أن:

$N \equiv 1 [16]$ أو $N \equiv 2 [16]$

③ أ- نضع : $D = p \wedge a$

إذن (P / N)

$$\begin{cases} D/p \\ D/a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D/N \\ D/a^4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} D/a^4+b^4 \\ D/a^4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} D/b^4 \\ D/a^4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow D/a^4 \wedge b^4$$

و $a^4 \wedge b^4 = 1$

وعليه: $D/1$

إذن $D = 1$

وعليه $\boxed{p \wedge a = 1}$

نضع $d = p \wedge b$

(لأن P/N)

$$\begin{cases} d/p \\ d/b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/N \\ d/a^4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/a^4+b^4 \\ d/b^4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow d/a^4 \wedge b^4$$ و $a^4 \wedge b^4 = 1$

$$\Rightarrow d/1$$

أي $d = 1$

وعليه: $\boxed{p \wedge b = 1}$

ب- لدينا $p \wedge a = 1$ حسب خاصية Bezout

$$\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2 / \alpha a + \beta P = 1$$

أي: $(-\alpha) a - \beta P = -1$

نضع: $-\alpha = c$

ومنه، $(\exists c \in \mathbb{Z})$ $ca \equiv -1 [P]$

لدينا، $P/N \Rightarrow N \equiv 0 [P]$

$$\Rightarrow a^4 \equiv -b^4 [P]$$

ولدينا، $ac \equiv -1 [P] \Rightarrow (ac)^4 \equiv 1 [P]$

و $(ac)^4 \equiv -(bc)^4 [P]$

وعليه، $-(bc)^4 \equiv 1 [P]$

ومنه، $(bc)^4 \equiv -1 [P]$

نضع: $bc = x$ وعليه،

$(\exists x \in \mathbb{Z})$ $\boxed{x^4 \equiv -1 [P]}$

ج- ليكن p عدد أولي ومنه: حسب مبرهنة فرما

$$x^p \equiv x [P] \Rightarrow x(x^{p-1} - 1) \equiv 0 [P]$$

- نفترض أن $x \equiv 0 [P]$

$$x \equiv 0 [P] \Rightarrow x^4 \equiv 0 [P]$$

ولدينا: $x^4 \equiv -1 [P]$ غير صحيح

إذن p لا يقسم x.

وعليه:

$$\boxed{x^{p-1} \equiv 1 [P]}$$

$$\exists ! (q, r) \in \mathbb{Z}^2 / p = 8q + r$$

$$x^4 \equiv -1 [P] \Rightarrow x^8 \equiv 1 [P]$$

$$\Rightarrow x^{8q+r-1} \equiv x^{r-1} [P]$$

$$\Rightarrow x^{p-1} \equiv x^{r-1} [P]$$

وبالتالي:

$$\boxed{x^{r-1} \equiv 1 [P]}$$

- ولنبين أن $r = 1$

$0 \leq r < 8$ (باقي القسمة الأقليدية للعدد p على 8)

$r = 0 \Rightarrow$ $p = 8q$ و p أولي إذن $r \neq 0$

$r \notin \{2, 4, 6\}$ لأن p عدد أولي أي p فردي وعليه r فردي

$r = 3 \Rightarrow$ $x^2 \equiv 1 [P] \Rightarrow x^4 \equiv 1 [P]$

ولدينا: $x^4 \equiv -1 [P]$

ومنه، $r \neq 3$

$r = 5 \Rightarrow$ $x^4 \equiv 1 [P]$ و $x^4 \equiv -1 [P]$

إذن: $r \neq 5$.

$r = 7 \Rightarrow$

$x^6 \equiv 1 [P]$ و $x^4 \equiv -1 [P]$

$x^6 \equiv 1 [P]$ و $x^6 \equiv -x^2 [P]$

$x^2 \equiv -1 [P] \Rightarrow x^4 \equiv 1 [P]$ و $x^4 \equiv -1 [P]$

وعليه $r \neq 7$.

$r = 1 \Rightarrow$ $1 \equiv 1 [P]$

إذن:

$$\boxed{r = 1}$$

ومنه: $\lim_{x\to+\infty} \frac{f_1(x)}{x}=0$

إذن: (C_1) يقبل فرعا شلجميا باتجاه محور الأفاصيل

③ f_1 قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^{+*}$

$$f_1'(x) = \frac{-1}{x^2} - \frac{3(\ln x)^2}{x}$$

$$= -\left(\frac{1}{x^2}+\frac{3(\ln x)^2}{x}\right) < 0 \quad (x\in\mathbb{R}^{+*})$$

ومنه f_1 تناقصية قطعا على $\mathbb{R}^{+}$

x	0	$+\infty$
$f_1(x)$	$+\infty$ ↘	$-\infty$

④ f_1 متصلة وتناقصية قطعا على $\mathbb{R}^{+*}$

ومنه f_1 تقابل من $\mathbb{R}^{+*}$ نحو $\mathbb{R}$.

و $0\in\mathbb{R}$ إذن المعادلة $f_1(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β_1 على $\mathbb{R}^{+*}$

ولدينا:

$f_1(2)=\frac{1}{2}-(\ln(2))^2>0$

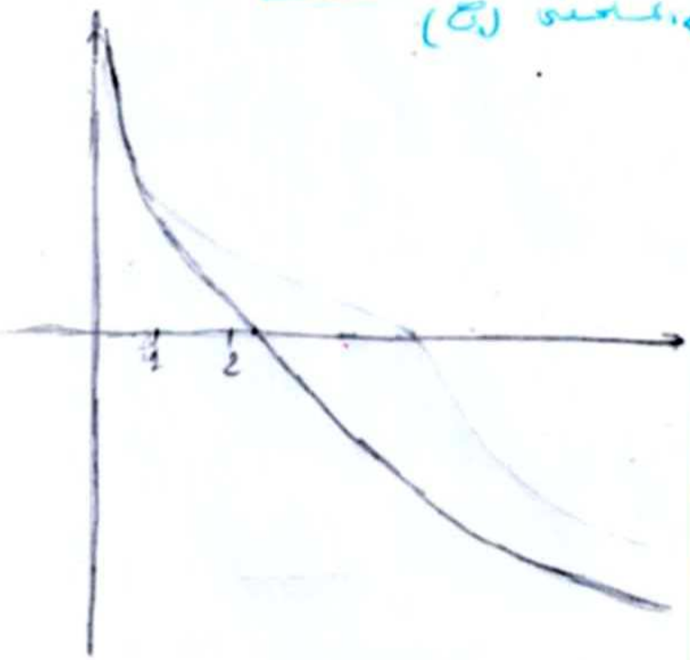
$f_1(e)=\frac{1}{e}-1<0$

ومنه: f_1 تناقصية على $\mathbb{R}^{+*}$

$$f_1(e)<f_1(\beta_1)<f_1(2)$$

وعليه: $\boxed{2<\beta_1<e}$

⑤ المنحنى (C_1)



التمرين III

$f_n(x)=\frac{1}{x}-(\ln x)^{2n+1}$

1- أ- لنبين أن $\lim_{x\to0^+} x(\ln x)^3=0$

نضع $X=x^{1/3}$ ومنه $x=X^3$

$$\lim_{x\to0^+} x(\ln x)^3=\lim_{X\to0^+}X^3(\ln(X^3))^3$$
$$=\lim_{X\to0^+}(3X\ln(X))^3$$

ولدينا $\lim_{X\to0^+}X\ln(X)=0$

وعليه: $\boxed{\lim_{x\to0^+} x(\ln x)^3=0}$

$$\lim_{x\to0^+} f_1(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}-(\ln x)^3\right)$$
$$=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}\left(1-x(\ln x)^3\right)$$

ولدينا:

$$\begin{cases}\lim_{x\to0^+} x(\ln x)^3=0 \Rightarrow \lim_{x\to0^+} 1-x(\ln x)^3=1\\ \lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty\end{cases}$$

وعليه: $\boxed{\lim_{x\to0^+} f_1(x)=+\infty}$

ب- $\lim_{x\to+\infty} f_1(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}-(\ln x)^3$

$$\begin{cases}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0\\ \lim_{x\to+\infty}(\ln x)^3=+\infty\end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}-(\ln x)^3=-\infty$$

وعليه: $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f_1(x)=-\infty}$

② لنبين أن: $\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^3}{x}=0$

نضع $X=x^{1/3}$ ومنه $x=X^3$

ومنه:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^3}{x}=\lim_{X\to+\infty}\frac{(\ln(X^3))^3}{X^3}$$
$$=\lim_{X\to+\infty}\left(3\frac{\ln(X)}{X}\right)^3$$

ولدينا:

$$\lim_{X\to+\infty}\frac{\ln(X)}{X}=0 \Rightarrow \lim_{X\to+\infty}\left(3\frac{\ln(X)}{X}\right)^3=0$$

ومنه: $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^3}{x}=0}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f_1(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}-\frac{(\ln x)^3}{x}$$

$\{ \lim \quad (\ln x)^3$

II - ①

$\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x} - (\ln x)^{2n+1}\right)$

لدينا :

$\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} (\ln x)^{2n+1} = +\infty \\ \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{cases}$

وعليه :

$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = -\infty}$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} - (\ln x)^{2n+1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\left(1 - x(\ln x)^{2n+1}\right)$

نضع : $x = X^{2n+1}$ ومنه $X = x^{\frac{1}{2n+1}}$

ومنه :

$\lim_{x\to 0^+} f_n(x) = \lim_{X\to 0^+} \frac{1}{X^{2n+1}}\left(1 - \left(X\ln(X^{2n+1})\right)^{2n+1}\right)$

$= \lim_{X\to 0^+} \frac{1}{X^{2n+1}}\left(1 - \left((2n+1)X\ln(X)\right)^{2n+1}\right)$

لدينا :

$\begin{cases} \lim_{X\to 0^+} X\ln(X) = 0 \\ \lim_{X\to 0^+} \frac{1}{X^{2n+1}} = +\infty \end{cases}$

ومنه :

$\boxed{\lim_{x\to 0^+} f_n(x) = +\infty}$

②

$f_n'(x) = \frac{-1}{x^2} - \frac{(2n+1)(\ln x)^{2n}}{x}$

$= -\left(\frac{1}{x^2} + \frac{(2n+1)(\ln x)^{2n}}{x}\right) < 0$

لدينا: f_n تناقصية و f_n متصلة على $\mathbb{R}^{*+}$

إذن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا β_n.

ولدينا :

$f_n(1) = 1 > 0$

$f_n(e) = \frac{1}{e} - 1 < 0$

f_n تناقصية

وعليه :

$\boxed{1 < \beta_n < e}$

③

$f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{1}{x} - (\ln x)^{2n+3} - \frac{1}{x} + (\ln x)^{2n+1}$

$= (\ln(x))^{2n+1}\left(1 - (\ln x)^2\right)$

$\forall x \in [1, e]$ $\quad 0 < \ln(x) < 1$

$-(\ln(x))^2 > -1$

$1 - (\ln x)^2 > 0$ و $(\ln x)^{2n+1} > 0$

ومنه :

$\boxed{f_{n+1}(x) - f_n(x) > 0}$

ب- لدينا : $\forall x \in [1, e]$

$f_{n+1}(x) > f_n(x)$.

ومنه $\beta_n \in [1, e]$

$f_{n+1}(\beta_n) > f_n(\beta_n)$ و $f_n(\beta_n) = 0$

ومنه : $f_{n+1}(\beta_n) > 0$ و $f_{n+1}(\beta_{n+1}) = 0$

وعليه :

$f_{n+1}(\beta_n) > f_{n+1}(\beta_{n+1})$

f_{n+1} تناقصية على $[1, e]$ و $(\beta_n, \beta_{n+1}) \in [1, e]^2$

وعليه

$\beta_n < \beta_{n+1}$

إذن: $(\beta_n)_{n\geq 1}$ تزايدية قطعا

4- أ-

لدينا : $f_n(\beta_n) = 0 \Rightarrow \frac{1}{\beta_n} = (\ln(\beta_n))^{2n+1}$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{\beta_n}\right)^{\frac{1}{2n+1}} = \ln(\beta_n)$

$\Rightarrow \ln(\ln(\beta_n)) = \frac{1}{2n+1}\ln\left(\frac{1}{\beta_n}\right)$

لدينا :

$\beta_n < e \Rightarrow \frac{1}{\beta_n} > \frac{1}{e}$

$\Rightarrow \ln\left(\frac{1}{\beta_n}\right) > \ln(e^{-1})$

$\Rightarrow \frac{1}{2n+1}\ln\left(\frac{1}{\beta_n}\right) > \frac{-1}{2n+1}$ $\quad \left(\frac{1}{2n+1} > 0\right)$

$\Rightarrow \ln(\ln(\beta_n)) > \frac{-1}{2n+1}$

ولدينا :

$\frac{-1}{2n+1} > \frac{-1}{2n}$

وعليه :

$\boxed{\ln(\ln(\beta_n)) > \frac{-1}{2n}}$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

ب- لدينا :

$\ln(\ln(\beta_n)) > \frac{-1}{2n} \Rightarrow \ln(\beta_n) > e^{-\frac{1}{2n}}$

ولدينا :

$\beta_n < e \Rightarrow \ln(\beta_n) < 1$

وعليه :

$e^{\frac{-1}{2n}} < \ln(\beta_n) < 1$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{-1}{2n} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} e^{-\frac{1}{2n}} = e^0 = 1$

(0.6 [illegible] e)

ومنه :

$\lim_{n\to+\infty} \ln(\beta_n) = 1$

أي

$\lim_{n\to+\infty} \beta_n = e$