# تصحيح الفرض المحروس رقم ① للأسدس الثاني

## الجزء (1)

$(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ $\quad f_n(x) = x e^{-\frac{1}{nx}}$ $\quad x\neq0$ و $f_n(0)=0$

① أ- لنبين أن $f_n$ متصلة على اليمين في $x_0=0$

$\lim_{x\to0^+} f_n(x) = \lim_{x\to0^+} x e^{-\frac{1}{nx}}$

$\lim_{x\to0^+} -\frac{1}{nx} = -\infty \Rightarrow \lim_{x\to0^+} e^{-\frac{1}{nx}} = 0$ و $\lim_{x\to0^+} x = 0$

وحيث:

$\lim_{x\to0^+} x e^{-\frac{1}{nx}} = 0 = f_n(0)$

إذن $f_n$ متصلة في 0 على اليمين

ب- لندرس قابلية اشتقاق الدالة $f_n$ على اليمين في 0.

ليكن $x$ عنصرا من المجال $]0;+\infty[$

$\frac{f_n(x)-f_n(0)}{x-0} = e^{-\frac{1}{nx}}$

$\lim_{x\to0^+} -\frac{1}{nx} = -\infty \Rightarrow \lim_{x\to0^+} e^{-\frac{1}{nx}} = 0$

وعليه: $\lim_{x\to0^+}\frac{f_n(x)-f_n(0)}{x-0}=0$

إذن $f_n$ قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 و $f'_{n_d}(0)=0$

② - أ-

$\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim_{x\to+\infty} x e^{-\frac{1}{nx}}$

لدينا: $\lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{nx} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} e^{-\frac{1}{nx}} = e^0 = 1$

(لأن $x\mapsto e^x$ متصلة في 0) و $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$

وعليه: $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$

ب- لنحسب المشتقة $f'_n(x)$

ليكن $x\in]0;+\infty[$

لدينا: $f'_n(x) = e^{-\frac{1}{nx}} + x\left(\frac{1}{nx^2}\right)e^{-\frac{1}{nx}}$

ومنه: $f'_n(x) = \left(1+\frac{1}{nx}\right)e^{-\frac{1}{nx}}$

← لدينا: $(\forall x\in]0;+\infty[)$ $\quad f'_n(x)>0$

وعليه: $f_n$ تزايدية قطعا على $[0;+\infty[$

← جدول تغيرات الدالة $f_n$.

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f_n(x)$ | $0$ ↗ | $+\infty$ |

③ $g(t) = e^{-t}-(1-t)$ $\quad t\in[0;+\infty[$

أ- لندرس تغيرات الدالة $g$

لكل $t\in[0;+\infty[$ $\quad g'(t) = 1-e^{-t}$

$-t\leqslant0 \Rightarrow e^{-t}\leqslant1$

$\Rightarrow 1-e^{-t}\geqslant0$

$\Rightarrow g'(t)\geqslant0$

ومنه: $g$ تزايدية قطعا على $[0;+\infty[$

| $t$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $g(t)$ | $0$ ↗ | $+\infty$ |

لدينا: $(\forall t\in[0;+\infty[)$ $\quad g(t)\geqslant g(0)=0$

ومنه: $e^{-t}-1+t\geqslant0$

أي: $1-e^{-t}\leqslant t$

ولدينا: $g'(t)\geqslant0 \Leftrightarrow 1-e^{-t}\geqslant0$

وعليه: $\forall t\in[0;+\infty[$ $\quad 0\leqslant1-e^{-t}\leqslant t$

ب- لنبين أن: $(\forall x\geqslant0)$ $\quad 0\leqslant e^{-x}-(1-x)\leqslant\frac{x^2}{2}$

لدينا حسب السؤال السابق:

$(\forall t\geqslant0)$ $\quad 0\leqslant1-e^{-t}\leqslant t$

وعليه:

$0\leqslant\int_0^x(1-e^{-t})\,dt\leqslant\int_0^x t\,dt$

أي: $0\leqslant[t+e^{-t}]_0^x\leqslant\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x$

ومنه: $0\leqslant x+e^{-x}-1\leqslant\frac{x^2}{2}$

إذن: $(\forall x\geqslant0)$ $\quad 0\leqslant e^{-x}-(1-x)\leqslant\frac{x^2}{2}$

④ - أ - لنبين أن :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad (\forall x > 0) \quad 0 \leq f_n(x) - \left(x - \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{2n^2 x}$$

لدينا حسب السؤال السابق :

$$(\forall x > 0) \quad 0 \leq e^{-x} - (1 - x) \leq \frac{x^2}{2} \qquad (1)$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad (\forall x > 0) \quad \frac{1}{nx} \in \mathbb{R}^+$$

لنعوض $x$ ب $\frac{1}{nx}$ في العلاقة $(1)$ .

نجد :

$$0 \leq e^{-\frac{1}{nx}} - \left(1 - \frac{1}{nx}\right) \leq \frac{1}{2n^2 x^2}$$

بما أن $x > 0$ فإن :

$$0 \leq x e^{-\frac{1}{nx}} - \left(x - \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{2n^2 x}$$

ومنه :

$$(\forall x > 0)\ (n \in \mathbb{N}^*) \quad 0 \leq f_n(x) - \left(x - \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{2n^2 x}$$

ب - لندرس الفرع اللانهائي لـ $(\mathcal{C}_n)$ عند $+\infty$

لدينا :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2n^2 x} = 0$$

ومنه :

$$\lim_{x \to +\infty} f_n(x) - \left(x - \frac{1}{n}\right) = 0$$

إذن المستقيم $(\Delta_n) : y = x - \frac{1}{n}$ مقارب مائل للمنحنى $\mathcal{C}_n$ بجوار $+\infty$

ج - لندرس الوضع النسبي لـ $\mathcal{C}_n$ والمقارب المائل .

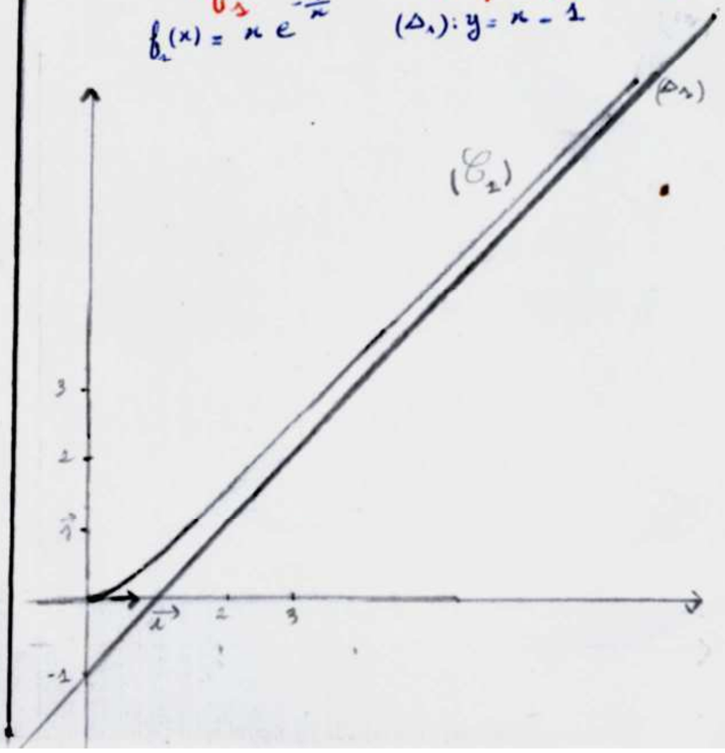
بما أن :

$$(\forall x > 0) \quad f_n(x) - \left(x - \frac{1}{n}\right) \geq 0$$

فإن : $(\mathcal{C}_n)$ يوجد فوق $(\Delta_n)$ $(\forall x \in [0; +\infty[)$

⑤ - لنرسم $(\mathcal{C}_1)$ للدالة $f_1$ .

$$f_1(x) = x e^{-\frac{1}{x}} \qquad (\Delta_1) : y = x - 1$$




⑥ - لنبين أن المنحنى $(\mathcal{C}_n)$ هو صورة $(\mathcal{C}_1)$ بالتحاكي $H\left(O, \frac{1}{n}\right)$ .

نعتبر $M(x, y)$ نقطة من $(\mathcal{C}_1)$ و $M'(x', y')$ صورتها بالتحاكي $H\left(O, \frac{1}{n}\right)$

لنبين أن $M'(x', y')$ تنتمي للمنحنى $(\mathcal{C}_n)$

$$\begin{pmatrix} M' \text{ صورة } M \\ \text{بالتحاكي} \\ H\left(O, \frac{1}{n}\right) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM'} = \frac{1}{n} \overrightarrow{OM}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{n} x \\ y' = \frac{1}{n} y \end{cases}$$

لدينا $M(x, y) \in (\mathcal{C}_1)$ وعليه :

$$\begin{cases} y = x e^{-\frac{1}{x}} \\ x = n x' \end{cases} \Rightarrow y = n x' e^{-\frac{1}{nx'}}$$

ومنه

$$y' = \frac{1}{n} y \Rightarrow y' = \frac{1}{n}\left(n x' e^{-\frac{1}{nx'}}\right)$$

أي

$$y' = x' e^{-\frac{1}{nx'}}$$

وعليه :

$$M'(x', y') \in (\mathcal{C}_n)$$

إذن : $(\mathcal{C}_n)$ هو صورة $(\mathcal{C}_1)$ بالتحاكي $H\left(O, \frac{1}{n}\right)$

## الجزء (2)

$$(n \in \mathbb{N}^*) \quad I_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$$

① - لنبين أن :

$$\forall x \in [0; 1] \quad f_n(x) \leq x$$

$$(\forall x \in [0; 1]) \quad \frac{-1}{nx} \leq 0 \Rightarrow e^{-\frac{1}{nx}} \leq 1$$

$$\Rightarrow x e^{-\frac{1}{nx}} \leq x$$

وعليه :

$$(\forall x \in [0; 1]) \quad f_n(x) \leq x$$

② - لنستنتج أن

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad I_n \leq \frac{1}{2}$$

لدينا :

$$\forall x \in [0; 1] \quad f_n(x) \leq x$$

ومنه :

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx \leq \int_0^1 x\,dx$$

أي :

$$I_n \leq \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1$$

وعليه :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad I_n \leq \frac{1}{2}$$

③ - لنبين أن :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leq I_n$$

لدينا (ص ٢.٤) .

$$(\forall x > 0) \quad f_n(x) \geq x - \frac{1}{n}$$

ومنه :

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx \geq \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x}{n}\right]_0^1$$

إذن :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad I_n \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$$

← لنحدد $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

لدينا من ② و ③

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{n} < I_n < \frac{1}{2}$$

و

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}-\frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

وعليه:

$$\lim_{n\to+\infty} I_n=\frac{1}{2}$$

## الجزء (3)

① - أ - لنبين أن المعادلة $f_n(x)=1$ تقبل حلا وحيدا $\alpha_n$.

$f_n$ متصلة وتزايدية قطعا على $[0;+\infty[$

ومنه: $f_n$ تقابل من $[0;+\infty[$ نحو $[0;+\infty[$

و $1\in[0;+\infty[$

إذن: $\exists!\ \alpha_n\in[0;+\infty[\ /\ f_n(\alpha_n)=1$

وعليه: المعادلة $f_n(x)=1$ تقبل حلا وحيدا.

ب - لنبين أن: $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad \alpha_n>1$

لدينا: $f_n(1)=e^{-\frac{1}{n}}$

$-\frac{1}{n}<0 \Rightarrow e^{-\frac{1}{n}}<1$

أي: $f_n(1)<f_n(\alpha_n)$

و $f_n$ تزايدية قطعا على $[0;+\infty[$ و $(1,\alpha_n)\in(\mathbb{R}^+)^2$

إذن: $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad \alpha_n>1$

② - لنتحقق أن $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad \alpha_n\ln\alpha_n=\frac{1}{n}$

$$f_n(\alpha_n)=1 \iff \alpha_n e^{-\frac{1}{n\alpha_n}}=1$$

$$\iff e^{-\frac{1}{n\alpha_n}}=\frac{1}{\alpha_n} \qquad (\alpha_n>1)$$

$$\iff \frac{-1}{n\alpha_n}=\ln\left(\frac{1}{\alpha_n}\right)$$

$$\iff \alpha_n\ln\left(\frac{1}{\alpha_n}\right)=-\frac{1}{n}$$

ومنه: $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad \alpha_n\ln(\alpha_n)=\frac{1}{n}$

③ - أ - لندرس تغيرات الدالة $h(x)=x\ln x$

$h$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^{+*}$

$h'(x)=\ln x+1 \qquad (\forall x\in]0;+\infty[)$

$h'(x)\geq 0 \Rightarrow \ln x\geq -1$

$\Rightarrow x\geq e^{-1}=\frac{1}{e}$

ومنه:

| $x$ | $0$ | $\frac{1}{e}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $h(x)$ | $0$ ↘ | $-\frac{1}{e}$ | ↗ $+\infty$ |

ب - لنبين أن المتتالية $(\alpha_n)$ تناقصية ونستنتج أنها متقاربة.

لدينا: $\alpha_n\ln\alpha_n=h(\alpha_n)=\frac{1}{n}$

و $\alpha_{n+1}\ln(\alpha_{n+1})=h(\alpha_{n+1})=\frac{1}{n+1}$

لدينا: $\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n} \iff h(\alpha_{n+1})<h(\alpha_n)$

و $h$ تزايدية قطعا على $]1;+\infty[$

و $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad \alpha_n\in]1;+\infty[$

وعليه: $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad \alpha_{n+1}<\alpha_n$

وبالتالي: $(\alpha_n)$ تناقصية.

← $(\alpha_n)$ تناقصية ومصغورة بالعدد 1 إذن $(\alpha_n)$ متقاربة.

④ - نضع:

$$\alpha=\lim_{n\to+\infty}\alpha_n$$

أ - لدينا: $(\forall n\in\mathbb{N})\quad \alpha_n>1$

ومنه: $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n\geq 1$

وعليه: $\alpha\geq 1$

← لنبين أن $h(\alpha)=0$

لدينا: $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n=\alpha$ و $x\mapsto\ln(x)$ متصلة في $\alpha$

ومنه: $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(\alpha_n)=\ln(\alpha)$

إذن: $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n\ln(\alpha_n)=\alpha\ln(\alpha)$

بما أن: $\alpha_n\ln(\alpha_n)=\frac{1}{n}$ و $\alpha\ln(\alpha)=h(\alpha)$

فإن: $h(\alpha)=0$

ب - لنستنتج قيمة النهاية $\alpha$.

لدينا:

$$h(\alpha)=0 \iff \alpha\ln(\alpha)=0$$

$$\iff \ln(\alpha)=0 \qquad (\alpha\geq 1)$$

$$\iff \alpha=1$$

وعليه: $\alpha=1$

## الجزء (4)

$x\in[0;+\infty[$

$F(x)=\int_x^{2x} f_1(t)\,dt\ ;\ x\neq 0$ و $F(0)=0$

① - أ - لنبين أن: $(\forall t>0)\quad 0<e^{-\frac{1}{t}}<1$

لدينا

$(\forall t>0)\quad -\frac{1}{t}<0 \Rightarrow 0<e^{-\frac{1}{t}}<1$

ب - لنبين أن: $F$ متصلة على يمين $x_0=0$

① ب - لدينا : $(\forall t>0)$

$0 < e^{-\frac{1}{t}} < 1 \Rightarrow 0 < t e^{-1/t} < t \quad (t>0)$

$\Rightarrow 0 < f_2(t) < t$

$\Rightarrow 0 < \int_x^{2x} f_2(t) < \left[\frac{t^2}{2}\right]_x^{2x}$

ومنه : $0 < F(x) < 2x^2 - \frac{x^2}{2}$

لدينا : $\lim_{x\to 0^+} 2x^2 - \frac{x^2}{2} = 0 = F(0)$

ومنه : F متصلة على اليمين في $x_0=0$

② - لنبين أن : $\lim_{x\to 0^+} \frac{F(x)}{x} = 0$

لدينا حسب السؤال السابق: $(\forall x>0)$

$0 < \frac{F(x)}{x} < 2x - \frac{x}{2}$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{3x}{2} = 0$

وعليه : $\lim_{x\to 0^+} \frac{F(x)}{x} = 0$

← إذن F قابلة للاشتقاق في 0 .

وعليه : $(\Gamma_F)$ يقبل نصف مماس عند $x_0=0$ معادلته :

$(P): y=0$ . (محور الأفاصيل)

③ - أ - لنبين أن : $(\forall t\in\mathbb{R}) \quad e^t > t+1$

نضع : $(t\in\mathbb{R}) \quad g(t) = e^t - t - 1$

$g'(t) = e^t - 1$

$g'(t) \geq 0 \Rightarrow e^t > 1$

ومنه : $\Rightarrow t > 0$

| $t$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g(t)$ | $+\infty$ ↘ | $0$ | ↗ $+\infty$ |

لدينا : $(\forall t\in\mathbb{R}) \quad g(t) \geq g(0) = 0$

ومنه : $(\forall t\in\mathbb{R}) \quad e^t \geq t+1$

ب - لنبين أن : $(\forall x>0) \quad F(x) \geq -x + \frac{3}{2}x^2$

لدينا : حسب السؤال السابق :

$e^{-1/t} \geq -\frac{1}{t} + 1$ ، ومنه $(t>0)$

ومنه : $t e^{-1/t} \geq t - 1$

وعليه : $\int_x^{2x} f_2(t)\,dt \geq \int_x^{2x} (t-1)\,dt$

$F(x) \geq \left[\frac{t^2}{2} - t\right]_x^{2x}$

ومنه : $(\forall x>0) \quad F(x) \geq -x + \frac{3}{2}x^2$

← لنحسب $\lim_{x\to+\infty} F(x)$

لدينا : $\lim_{x\to+\infty} \frac{3}{2}x^2 - x = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{3}{2}x - 1\right)$

$\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{2}x - 1 = +\infty \\ \lim_{x\to+\infty} x = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$

ج - لندرس الفرع اللانهائي للمنحنى $(\Gamma_F)$ عند $+\infty$

لدينا : $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$

و $\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x} \geq \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{2}x - 1 = +\infty$

وعليه : $(\Gamma_F)$ يقبل فرعا شلجميا باتجاه محور الأراتيب .

④ . أ - لنبين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ وأن $F'(x) = (4e^{\frac{1}{2x}} - 1) f_2(x)$

لدينا : $t \mapsto f_2(t)$ متصلة على $]0;+\infty[$

وعليه $f_2$ تقبل دالة أصلية G على $]0;+\infty[$

أي : $F(x) = G(2x) - G(x)$

لدينا : $x \xmapsto{u} 2x$ قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$

و $x \mapsto G(x)$ قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$

و $u(]0;+\infty[) \subset ]0;+\infty[$

وعليه : $x \xmapsto{F} G(2x) - G(x)$ قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$

$(\forall x\in ]0;+\infty[)$

$F'(x) = 2G'(2x) - G'(x)$

$= 2 f_2(2x) - f_2(x)$

$= 2(2x e^{-\frac{1}{2x}}) - f_2(x)$

$= f_2(x)(4e^{\frac{1}{2x}} - 1)$

ومنه : $(\forall x\in ]0;+\infty[) \quad F'(x) = (4e^{\frac{1}{2x}} - 1) f_2(x)$

ب - لندرس تغيرات الدالة F ونضع جدول تغيراتها .

لدينا : $(\forall x\in\mathbb{R}^{*+}) \quad F'(x) = (4e^{\frac{1}{2x}} - 1) f_2(x)$

لدينا : $(\forall x\in\mathbb{R}^{*+}) \quad f_2(x) > 0$

و $\frac{1}{2x} > 0 \Rightarrow e^{\frac{1}{2x}} > 1$

$\Rightarrow 4e^{\frac{1}{2x}} > 4$

$\Rightarrow 4e^{\frac{1}{2x}} - 1 > 3 > 0$

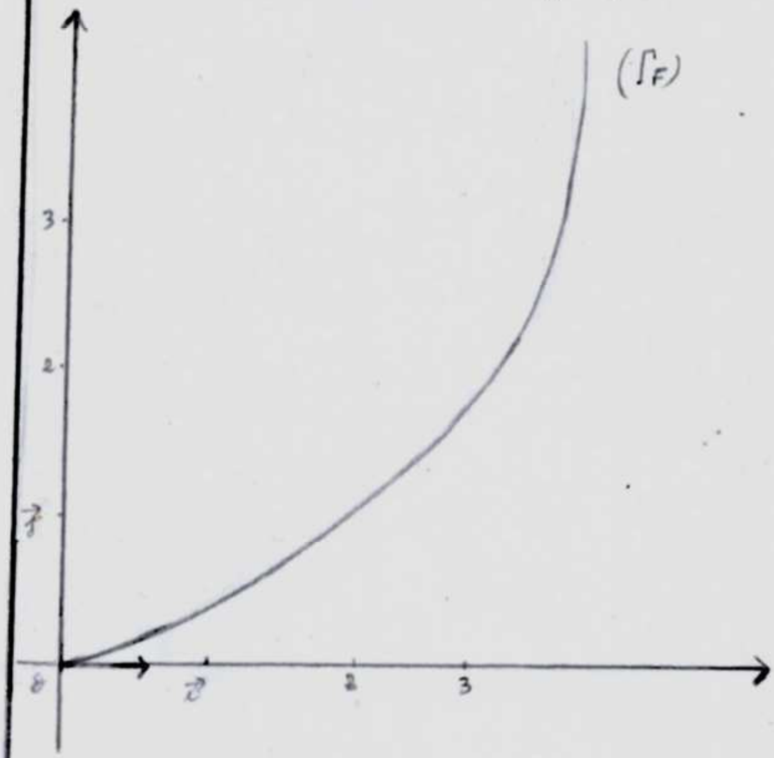
④- ب - ومنه : $F'(x)>0$ $(\forall x\in\mathbb{R}^{*+})$

إذن : F تزايدية قطعا على $]0;+\infty[$

جدول تغيرات F.

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $F(x)$ | $0$ ↗ | $+\infty$ |

⑤- رسم المنحنى $(\Gamma_F)$




من انجاز التلميذة : أمينة سامي

تحت اشراف الأستاذ : المانتي بوشعيب