

أ. بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*) 1 \leq \frac{I_n}{U_{n+1} - U_n} \leq e^{\frac{1}{U_{n+1}}}$ واستنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_n}{U_{n+1} - U_n}$
 ب. أحسب النهاية $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

الجزء الثالث :

لتكن F الدالة العددية المعرفة على المجال $[0, +\infty[$ بما يلي :

$$F(0) = 0 \text{ و } F(x) = \int_x^{2x} f_2(t) dt ; \quad x \neq 0$$

1) أ. بين أن $(\forall t > 0) 0 < e^{-\frac{2}{t}} < 1$

ب. بين أن F متصلة وقابلة للاشتقاق على يمين $x_0 = 0$

2) أ. بين أن $(\forall t \in \mathbb{R}) e^t \geq t + 1$

ب. بين أن $(\forall x > 0) F(x) \geq -2x + \frac{3}{2}x^2$ ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$

ج. أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (Γ_F) عند $+\infty$

3) أ. بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على المجال $]0, +\infty[$

$$\text{و بين أن } F'(x) = \left(4e^{\frac{1}{x}} - 1\right) f_2(x)$$

ب. أدرس تغيرات الدالة F وأنجز جدول التغيرات

4) أرسم المنحنى (Γ_F)

5) أ. بين أن $(\forall x > 0) x^2 e^{-\frac{2}{x}} \leq F(x) \leq 2x^2 e^{-\frac{1}{x}}$

ب. بين أن $(\forall x \in \mathbb{R}) e^x > ex$ واستنتج أن $F\left(\sqrt{\frac{e}{2}}\right) < \sqrt{\frac{e}{2}}$

6) أ. بين أن $(\forall x \geq U_2) F(x) \geq x$

ب. استنتج أن $\alpha = \int_{\alpha}^{2\alpha} f_2(t) dt$ $\left(\exists \alpha \in \left[\sqrt{\frac{e}{2}}, U_2\right]\right)$

حظ سعيد

ليكن n عدد من \mathbb{N}^* ونعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على $[0, +\infty[$

$$\text{بما يلي : } x \neq 0 ; \quad f_n(x) = x e^{-\frac{n}{x}} \text{ و } f_n(0) = 0$$

الجزء الأول :

1) أ. بين أن f_n متصلة على يمين $x_0 = 0$

ب. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f_n على يمين $x_0 = 0$

2) أ. أحسب المشتقة $f_n'(x)$ لكل x من المجال $]0, +\infty[$

ب. أدرس تغيرات الدالة f_n وضع جدول تغيراتها

3) أ. أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_n)

ب. أرسم المنحنى (C_2)

الجزء الثاني :

1) أ. بين أن المعادلة $f_n(x) = 1$ تقبل حلا وحيدا U_n

ب. بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*) U_n > 1$

2) أ. بين أن $f_n(U_{n+1}) = e^{\frac{1}{U_{n+1}}}$

ب. استنتج أن المتتالية $(U_n)_n$ تزايدية

3) أ. بين أن $U_n \ln U_n = n$

ب. بين أن الدالة $g(x) = x \ln x$ تقابل من المجال $]1, +\infty[$ نحو مجال

يتم تحديده واستنتج أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$

4) أ. بين العلاقة $\forall n \in \mathbb{N}^* : \ln U_n + \ln(\ln U_n) = \ln n$

ب. استنتج النهاية $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln U_n}{\ln n}$

5) نعتبر $I_n = \int_{U_n}^{U_{n+1}} f_n(t) dt$ لكل n عدد من \mathbb{N}^* ونضع $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} I_k$