السنة 2 بكالوريا علوم رياضية	الدوال اللوغاريتمية- الدوال الأسية حلول مقترحة	استعدادا لاجتياز فروضك

فرض تجريبي من اقتراح أذ سمير لخريسي - مدة الانجاز ساعتان

تمرين 1 :

I) $g(x)=e^{x}+e^{-x}-2$

1 لدينا g دالة قابلة للاشتقاق على IR و لدينا : $\forall x\in IR \quad g'(x)=e^{x}-e^{-x}$

و لدينا : $x\in \left]-\infty;0\right] \Rightarrow x\le 0 \Rightarrow 2x\le 0 \Rightarrow x\le -x \Rightarrow e^{x}\le e^{-x} \Rightarrow g'(x)\le 0$

إذن g تناقصية على $\left]-\infty;0\right]$

2 ليكن $x<0$ ، نعتبر الدالة $h(t)=e^{t}-e^{-t}-2t$ ذات المتغير t، هذه الدالة متصلة على $[x,0]$ و قابلة للاشتقاق على $\left]x,0\right[$ (لأنها متصلة و قابلة للاشتقاق على IR)، إذن حسب مبرهنة التزايدات المنتهية

فإنه : $\exists c_{x}\in \left]x;0\right[\quad h(x)-h(0)=x\,h'(c_{x})$ ، و لدينا : $\forall t\in IR \quad h'(t)=e^{t}+e^{-t}-2=g(t)$

منه : $h(x)=x\,g(c_{x})$ ($h(0)=0$)، بما أن g تناقصية على $\left]-\infty;0\right]$ فإن :

$$x<c_{x}<0 \Rightarrow g(0)<g(c_{x})<g(x) \Rightarrow 0<\frac{e^{x}-e^{-x}-2x}{x}<e^{x}+e^{-x}-2$$

منه :
$$x<0 \Rightarrow \frac{e^{x}+e^{-x}-2}{x}\le \frac{e^{x}-e^{-x}-2x}{x^{2}}\le 0$$

بالتالي :
$$\forall x<0; \quad \frac{e^{x}+e^{-x}-2}{x}\le \frac{e^{x}-e^{-x}-2x}{x^{2}}\le 0$$

يجب جعل x عددا ثابتا أثناء البرهان و ذلك بالجملة: «ليكن $x<0$ »

في السطر الأخير و بعد أن نكون قد برهنا على صحة المتفاوتة بالنسبة لقيمة ثابتة x، يحق لنا استنتاج جملة رياضية تتضمن المكمم الكوني تعمم النتيجة لكل الأعداد السالبة.

3 بما أن : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} 0=0$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{e^{x}+e^{-x}-2}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{e^{x}-1+\left(e^{-x}-1\right)}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{e^{x}-1}{x}-\frac{e^{-x}-1}{-x}=1-1=0$

فإن :
$$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{e^{x}-e^{-x}-2x}{x^{2}}=0$$

4 لدينا الدالة $p(x)$ قابلة للاشتقاق على IR و لدينا :

$$\forall x\in IR \quad p'(x)=\left(e^{x}+e^{-x}\right)+x\left(e^{x}-e^{-x}\right)-e^{x}-e^{-x}=x\left(e^{x}-e^{-x}\right)$$

و بما أن : $x\in \left]-\infty;0\right] \Rightarrow e^{x}\le e^{-x} \Rightarrow x\left(e^{x}-e^{-x}\right)\ge 0 \Rightarrow p'(x)\ge 0$

فإن $p(x)$ تزايدية على $\left]-\infty;0\right]$ ، منه : $x\in \left]-\infty;0\right] \Rightarrow x\le 0 \Rightarrow p(x)\le p(0) \Rightarrow p(x)\le 0$

إذن : $\forall x\in \left]-\infty;0\right] \quad p(x)\le 0$

II)
$$\forall x<0 \quad f(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{x}-2 \quad ، \quad \forall x>0 \quad f(x)=x^{2}\left(\ln(x)-\frac{1}{2}\right) \quad ، \quad f(0)=0$$

1 لدينا :
$$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{e^{x}-e^{-x}}{x}-2=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{e^{x}-1-\left(e^{-x}-1\right)}{x}-2=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{e^{x}-1}{x}+\frac{e^{-x}-1}{-x}-2=1+1-2=0$$

و
$$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^{2}\left(\ln(x)-\frac{1}{2}\right)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^{2}\ln(x)-\frac{1}{2}x^{2}=0-0=0$$

إذن : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=0=f(0)$ ، بالتالي f متصلة في الصفر

2

لدينا : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x\left(\ln(x)-\frac{1}{2}\right) = \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x\ln(x)-\frac{1}{2}x = 0-0=0$

و $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \frac{\frac{e^x-e^{-x}}{x}-2}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \frac{e^x-e^{-x}-2x}{x^2}=0$ (حسب سؤال I) 3))

إذن f قابلة للاشتقاق في الصفر حيث : $f'(0)=0$ و هذا يعني أن منحنى الدالة f يقبل مماسا أفقيا في النقطة $O(0;0)$

3

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(\ln(x)-\frac{1}{2}\right)=+\infty$ (لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x)-\frac{1}{2}=+\infty$)

و $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\ln(x)-\frac{1}{2}\right)=+\infty$ (لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x)-\frac{1}{2}=+\infty$)

إذن (Cf) يقبل فرعا شلجميا باتجاه محور الأراتيب جوار $+\infty$

ولدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x}+\frac{e^{-x}}{x}-2 = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{e^{-t}}{-t}-\frac{e^t}{t}-2 = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{-1}{t e^t}-\frac{e^t}{t}-2=-\infty$

و $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x^2}+\frac{e^{-x}}{x^2}-\frac{2}{x} = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}+\frac{e^t}{t^2}+\frac{2}{t} = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{1}{t^2 e^t}+\frac{e^t}{t}+\frac{2}{t}=+\infty$ (وضعنا : $t=-x$)

إذن (Cf) يقبل فرعا شلجميا باتجاه محور الأراتيب جوار $-\infty$

4

لدينا : $\forall x<0 \quad f'(x)=\frac{(e^x+e^{-x})x-(e^x-e^{-x})}{x^2}=\frac{p(x)}{x^2}$

و $\forall x>0 \quad f'(x)=2x\left(\ln(x)-\frac{1}{2}\right)+x^2\times\frac{1}{x}=2x\ln(x)-x+x=2x\ln(x)$

5

لدينا حسب السؤال I) 4) $p(x)\le0 \quad \forall x\in]-\infty;0]$ منه : $f'(x)\le0 \quad \forall x<0$

ولدينا على $]0;+\infty[$ $f'(x)$ لها نفس إشارة $\ln(x)$ أي لها نفس إشارة الحدانية $x-1$

بالتالي :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		-		-		+	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

6

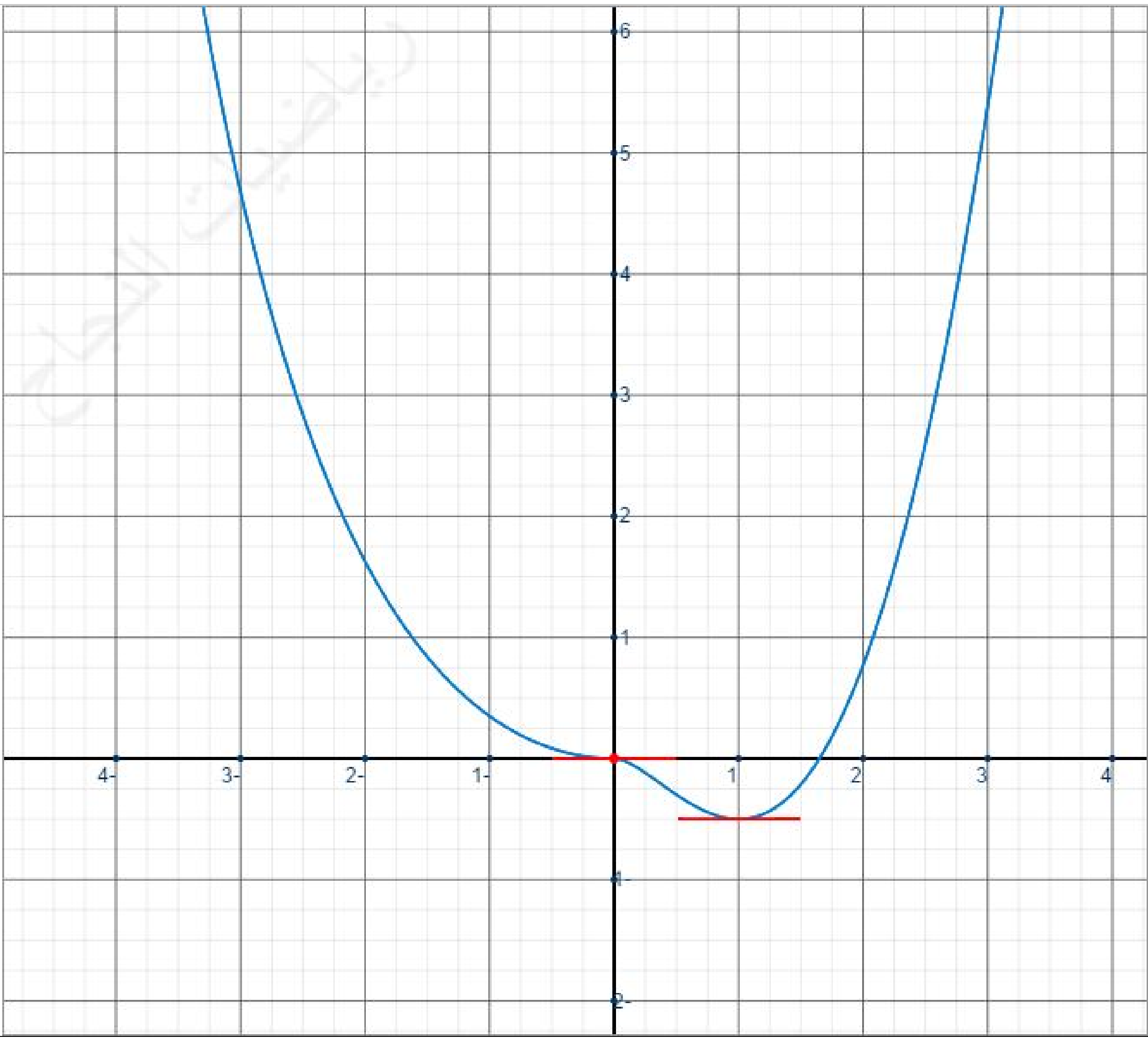
لدينا $f(0)=0$ إذن (Cf) يمر من O

ولدينا على $]-\infty;0[$ $f(x)<f(0)$ أي $f(x)<0$

وعلى $]0;+\infty[$ ، لدينا : $f(x)=0 \Leftrightarrow \ln(x)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$

إذن (Cf) يقطع محور الأفاصيل في النقطتين $O(0,0)$ و $A(\sqrt{e},0)$

7



تمرين 2 : $n \geq 3$; $f_n(x)=\frac{e^x}{x}-n$

1 $Df_n = IR^*$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)=-n$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f_n(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f_n(x)=-\infty$

2 لدينا f_n قابلة للاشتقاق على مجموعة تعريفها و لدينا : $f_n'(x)=\frac{e^x\,x-e^x}{x^2}=\frac{e^x}{x^2}(x-1)$ $\quad \forall x\in IR^*$

منه :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f_n'(x)$	-	‖ -	+	
$f_n(x)$	$-n \searrow -\infty$	‖ $+\infty \searrow$	$e-n$	$\nearrow +\infty$

3 على $]-\infty;0[$ لدينا : $f_n(x)<-n<0$ ، و و على $]0;+\infty[$ لدينا:

$f_n(x)$ متصلة و تناقصية قطعا على $]0;1]$ إذن : $f_n(]0;1])=\left[f_n(1);\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f_n(x)\right[=[e-n;+\infty[$

وبما أن $0\in[e-n;+\infty[$ (لأن : $e-n\leq e-3<0$) و الدالة $f_n(x)$ تباين على $]0;1]$ (لأنها تقابل)

فإن: $f_n(u_n)=0 \quad \exists!\, u_n\in\,]0;1]$

	$f_n(x)$ متصلة و تزايدية قطعا على $[1;+\infty[$ إذن : $f_n([1;+\infty[)=\left[f_n(1);\lim\limits_{x\to+\infty}f_n(x)\right[=[e-n;+\infty[$ وبما أن $0\in[e-n;+\infty[$ و الدالة $f_n(x)$ تباين على $[1;+\infty[$ فإن: $\exists!\, v_n\in[1;+\infty[\quad f_n(v_n)=0$ خلاصة : المعادلة $f_n(x)=0$ تقبل حلين وحيدين u_n و v_n حيث : $0<u_n<1<v_n$	
4	لدينا : $f_{n+1}(x)=\frac{e^x}{x}-(n+1)=f_n(x)-1 \quad \forall x\in IR^*$ منه: $f_{n+1}(u_n)=f_n(u_n)-1=0-1=-1$ و $f_{n+1}(v_n)=f_n(v_n)-1=0-1=-1$	
5	لدينا : $f_{n+1}(u_n)=-1$ و $f_{n+1}(u_{n+1})=0$ منه : $f_{n+1}(u_{n+1})>f_{n+1}(u_n)$ وبما أن : $u_n\in]0;1]$ و f_{n+1} تناقصية على $]0;1]$ فإن $u_{n+1}<u_n$ لدينا : $f_{n+1}(v_n)=-1$ و $f_{n+1}(v_{n+1})=0$ منه : $f_{n+1}(v_{n+1})>f_{n+1}(v_n)$ وبما أن : $v_n\in[1;+\infty[$ و f_{n+1} تزايدية على $[1;+\infty[$ فإن $v_{n+1}>v_n$ بالتالي $(u_n)_{n\geq3}$ تناقصية و $(v_n)_{n\geq3}$ تزايدية	
	نعلم أنه إذا كانت g دالة تزايدية فإن : $a\geq b\ \Rightarrow\ g(a)\geq g(b)$ ، الاستلزام العكسي صحيح لأنه في الحقيقية الاستلزام $g(a)\geq g(b)\ \Rightarrow a\geq b$ يكافئ $a<b\ \Rightarrow g(a)<g(b)$ و هو شرط تحققه الدالة التزايدية قطعا وهذا هو المبدأ المستعمل في تحديد رتابة المتتاليتين أعلاه	
6	بما أن $(u_n)_{n\geq3}$ تناقصية و مصغورة بـ 0 فهي متقاربة ، نضع : $a=\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ لدينا : $f_n(u_n)=0$ منه : $\frac{e^{u_n}}{u_n}=n$ منه : $u_n=\frac{e^{u_n}}{n}$ بما أن : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=a$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}e^{u_n}=e^a$ منه : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{e^{u_n}}{n}=0$ ($\frac{\ell}{+\infty}$) بالتالي : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$	
	يمكن أيضا استعمال التأطير : $0<u_n<1\ \Rightarrow\ 1<e^{u_n}<e\ \Rightarrow\ \frac{1}{n}<\frac{e^{u_n}}{n}<\frac{e}{n}\Rightarrow\ \frac{1}{n}<u_n<\frac{e}{n}$	
7	بما أن $(v_n)_{n\geq3}$ تزايدية فلكي نبين أن $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=+\infty$ يكفي أن نبين أنها غير مكبورة من أجل ذلك نفترض أنها مكبورة ، و لكونها تزايدية سنستنتج أنها متقاربة و بنفس الطريقة السابقة و بوضع $b=\lim\limits_{n\to+\infty}v_n$ فنستنتج أن : $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{e^{v_n}}{n}=0$ منه : $b=0$ لكننا نعلم أن : $v_n>1\quad \forall n\geq3$ منه : $b\geq1$ و هذا غير ممكن إذن $(v_n)_{n\geq3}$ غير مكبورة بالتالي : $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=+\infty$	
	يمكن استعمال التأطير هذه الحالة أيضا، لكن ليس بالطريقة السابقة، بل كما يلي : $\begin{cases}v_n=\frac{e^{v_n}}{n}\\ v_n>1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}v_n=\ln(n\,v_n)\\ v_n>\ln(n)\end{cases}$ و حيث أن : $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(n)=+\infty$ فإن : $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=+\infty$ لذلك من المفيد التدرب على إنجاز مثل هذه الأسئلة بطريقتين، لأنه أحيانا لا يتعذر علينا تطبيق إحداهما	