

التمرين الأول

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $f(x) = x + 2 - \sqrt{x^2 + 4x}$

الجزء (1)

(1) أ) أحسب النهايتين $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ب) بين أن المستقيم $y = 2x + 4$ (Δ) مقارب للمنحنى (C_f) عند $-\infty$

(2) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على يمين $a = 0$ وعلى يسار النقطة $b = -4$

(3) أ) أحسب المشتقة $f'(x)$

ب) بين أن f تزايدية على $]-\infty, -4]$ و تناقصية على المجال $[0, +\infty[$

(4) أرسم المنحنى (C_f)

الجزء (2)

(1) أ- بين أن $(\forall x > 0) \quad x \leq \sqrt{x^2 + 4x} \leq x + 2$

ب- بين أن $(\forall x > 0) \quad \frac{2}{x+2} \geq \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2}$

ج- استنتج أن $(\forall x > 0) \quad \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{2}{x}$

(2) نعتبر المتتالية $(U_n)_{n>0}$ المعرفة بما يلي : $U_n = \sum_{k=1}^{k=n} f\left(\frac{n^2}{k}\right)$

أ- بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \sum_{k=1}^{k=n} k^2 \leq n^3$

ب- بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 1 - \frac{3}{n} \leq U_n \leq 1 + \frac{1}{n}$

ج- استنتج أن $(U_n)_n$ متقاربة و حدد نهايتها

التمرين الثاني

نعتبر المتتالية $(U_n)_{n>0}$ المعرفة بما يلي : $U_n = \sqrt{n + \sqrt{(n-1) + \dots + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}}$

(1) أحسب U_2 ; U_1

(2) حدد نهاية المتتالية $(U_n)_{n>0}$

(3) أ- عبر عن U_{n+1} بدلالة U_n و بين أن $U_n \leq n$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$)

ب- اثبت أن $(\forall n > 2) \quad U_n \leq \sqrt{n + 2\sqrt{n-1}}$

ج- استنتج أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{U_n}{\sqrt{n}} = 1$