السنة 2 بكالوريا علوم رياضية	الأعداد العقدية حلول مقترحة	فروض النجاح استعدادا لاجتياز فروضك

فرض تجريبي من اقتراح أذ سمير لخريسي - مدة الانجاز ساعتان

تمرين 1: $(E):\ z^2-2iz-i-1=0$

1

لدينا: $\Delta=-4+4(i+1)=4i=2(2i)=2(1+i)^2=\left(\sqrt{2}(1+i)\right)^2$

منه: $z_1=a=\dfrac{2i+\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i}{2}=\dfrac{\sqrt{2}+\left(2+\sqrt{2}\right)i}{2}$ و $z_2=b=\dfrac{2i-\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i}{2}=\dfrac{-\sqrt{2}+\left(2-\sqrt{2}\right)i}{2}$

بالتالي: $S=\left\{\dfrac{\sqrt{2}+\left(2+\sqrt{2}\right)i}{2}\ ;\ \dfrac{-\sqrt{2}+\left(2-\sqrt{2}\right)i}{2}\right\}$

2

$$a=i+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}\,i}{2}=e^{\frac{\pi}{2}i}+e^{\frac{\pi}{4}i}=e^{\frac{3\pi}{8}i}\left(e^{\frac{\pi}{8}i}+e^{\frac{-\pi}{8}i}\right)=2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)e^{\frac{3\pi}{8}i}=\left[2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right);\frac{3\pi}{8}\right]$$

$$b=i-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}\,i}{2}\right)=e^{\frac{\pi}{2}i}-e^{\frac{\pi}{4}i}=e^{\frac{3\pi}{8}i}\left(e^{\frac{\pi}{8}i}-e^{\frac{-\pi}{8}i}\right)=2i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)e^{\frac{3\pi}{8}i}$$

$$b=2\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)e^{\frac{\pi}{2}i}e^{\frac{3\pi}{8}i}=\left[2\sin\left(\frac{\pi}{8}\right);\frac{7\pi}{8}\right]$$

3

أ) تحقق أن: $\left|\dfrac{b}{a}\right|=\dfrac{2\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)}{2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)}=\tan\dfrac{\pi}{8}$

ب)

$$\tan\frac{\pi}{8}=\left|\frac{b}{a}\right|=\frac{|b|}{|a|}=\frac{\sqrt{\dfrac{2+\left(2-\sqrt{2}\right)^2}{4}}}{\sqrt{\dfrac{2+\left(2+\sqrt{2}\right)^2}{4}}}=\sqrt{\frac{2+4-4\sqrt{2}+2}{2+4+4\sqrt{2}+2}}$$

$$\tan\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}=\sqrt{\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)^2}{4-2}}=\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}-2}{2}=\sqrt{2}-1$$

4

$A(a)$ و $B(b)$ و $C(i)$ و $D(-1)$ و $P(p)$ (مع $p\in C$)

أ) لدينا: $\dfrac{z_A+z_B}{2}=\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{2i}{2}=i=z_C$ منه: C منتصف $[AB]$

ب) لدينا: $\dfrac{z_B-z_O}{z_A-z_O}=\dfrac{b}{a}=\tan\left(\dfrac{\pi}{8}\right)e^{\frac{7\pi}{8}i-\frac{3\pi}{8}i}=\tan\left(\dfrac{\pi}{8}\right)e^{\frac{\pi}{2}i}=\tan\left(\dfrac{\pi}{8}\right)i$ منه: $\dfrac{z_B-z_O}{z_A-z_O}\in i\,IR$

بالتالي المثلث OAB قائم الزاوية في O

ج) لدينا:

$$\frac{z_B-z_D}{z_A-z_D}=\frac{b+1}{a+1}=\frac{\dfrac{-\sqrt{2}+\left(2-\sqrt{2}\right)i}{2}+1}{\dfrac{\sqrt{2}+\left(2+\sqrt{2}\right)i}{2}+1}=\frac{2-\sqrt{2}+\left(2-\sqrt{2}\right)i}{2+\sqrt{2}+\left(2+\sqrt{2}\right)i}=\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)(1+i)}{\left(2+\sqrt{2}\right)(1+i)}=\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$$

منه: $\dfrac{z_B-z_D}{z_A-z_D}\in IR$ بالتالي أن النقط A و B و D مستقيمية

لاحظ أن الشكل الجبري هذه المرة هو مفتاح الحل، لذلك يجب دائما محاولة استعمال الشكلين الجبري و الهندسي في الأسئلة للتعرف على الشكل الذي سيفي بالغرض.

د) طريقة 1

$|i\,p+1|=|p|=1 \Leftrightarrow |i(p-i)|=|p|=1 \Leftrightarrow |p-i|=|p|=1 \Leftrightarrow CP=OP$

إذن P هي إحدى نقطتي تقاطع الدائرتين $(O;1)$ و $(C;1)$،

و بما أن: $OC=1$ فإن المثلث OCP مثلث متساوي الأضلاع

طريقة 2

بعد إنشاء شكل بسيط نجد أن : $p=\left[1;\frac{\pi}{6}\right]=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$ أو $p=\left[1;\frac{5\pi}{6}\right]=\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$

$$|i\,p+1|=|p|=1 \Leftrightarrow \begin{cases}p\bar p=1\\ (i\,p+1)(-i\,\bar p+1)=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}p\bar p=1\\ p\bar p+i\,p-i\,\bar p+1=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}p\bar p=1\\ i\,p-i\,\bar p+1=0\end{cases}$$

$$|i\,p+1|=|p|=1 \Leftrightarrow \begin{cases}p\bar p=1\\ i\,p^2-i\,\bar p\,p+p=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}p\bar p=1\\ i\,p^2+p-i=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}p\bar p=1\\ p^2-i\,p-1=0\end{cases}$$

$$\Delta=-1+4=3 \Rightarrow p=\frac{i+\sqrt{3}}{2} \quad ou \quad p=\frac{i-\sqrt{3}}{2}$$

أحيانا الحل الهندسي يكون أبسط

تمرين 2 : في المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec u,\vec v)$

ونعتبر التطبيق f الذي يربط كل نقطة $M(z)$ من $(P)\backslash(O,\vec v)$ بالنقطة $M'(z')$ بحيث : $z'=\frac{z-\bar z}{z+\bar z}z$

1 — $M\in(P)\backslash(O,\vec v) \Rightarrow z\neq 0$ منه : $z'=z \Rightarrow \frac{z-\bar z}{z+\bar z}z=z \Rightarrow \frac{z-\bar z}{z+\bar z}=1 \Rightarrow z-\bar z=z+\bar z \Rightarrow \bar z=0 \Rightarrow z=0$

و هذا غير ممكن، بالتالي f لا يقبل أي نقطة صامدة

2 — $z'=0 \Leftrightarrow \frac{z-\bar z}{z+\bar z}z=0 \Leftrightarrow z=\bar z \Leftrightarrow z\in IR$ ، بالتالي (K) هو المحور الحقيقي محروم من النقطة O

3 — نضع $z=x+i\,y$ حيث : $(x,y)\in IR^2$

$$|z'|=|z| \Leftrightarrow \left|\frac{z-\bar z}{z+\bar z}z\right|=|z| \Leftrightarrow |z-\bar z|=|z+\bar z| \Leftrightarrow |2i\,y|=|2x| \Leftrightarrow |y|=|x| \Leftrightarrow y=x \; ou \; y=-x$$

إذن (P) هو اتحاد المستقيمين $(\Delta_1): y=x$ و $(\Delta_2): y=-x$ محروم من النقطة O

4 — لدينا : $z'-z=\frac{z-\bar z}{z+\bar z}z-z=\left(\frac{z-\bar z}{z+\bar z}-1\right)z=\frac{-2\bar z}{z+\bar z}z=\frac{-2z\bar z}{z+\bar z}\in IR$

ما يعني أن $z'-z=\frac{-2z\bar z}{z+\bar z}\times 1=\frac{-2z\bar z}{z+\bar z}z_{\vec u}$ أي أن $\overrightarrow{MM'}$ و $\vec u$ مستقيميتان

أي أن المستقيم (MM') له اتجاه ثابت هو اتجاه المحور الحقيقي

5 — لدينا : $\frac{z'}{z}=\frac{z-\bar z}{z+\bar z}=\frac{y}{x}i \in i\,IR$ منه $(OM)\perp(OM')$

6 — إذا كانت M نقطة من المحور الحقيقي فإن $M'=O$

إذاكانت M نقطة خارج المحور الحقيقي، فإن M' خي نقطة تقاطع المستقيم المارمن M و الموازي للمحور الحقيقي مع المستقيم المارمن O و العمودي على (OM)

7 — $$z'=\frac{z-\bar z}{z+\bar z}z=\frac{re^{\theta i}-re^{-\theta i}}{re^{\theta i}+re^{-\theta i}}re^{\theta i}=r\frac{2i\sin\theta}{2\cos\theta}e^{\theta i}=r\tan\theta\, e^{\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)i}=r(-\tan\theta)e^{\left(\theta+\frac{\pi}{2}+\pi\right)i}$$

$$z'=\left[-r\tan\theta\;;\;\theta+\frac{3\pi}{2}\right]$$

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi \Rightarrow \tan\theta<0$ و هذا سبب إدراج الإشارة لأن الشكل الهندسي يتوجب أن يكون المعيار موجبا

تمرين 3 : $A(a)$ و $B(b)$ و $C(c)$ ، $M(z)$ ، $M'(z')$ / $M'=F(M)$ $(w\in C^*)$ $z'=w\,z+a-aw$

1 —
- الحالة : $w=5$ ، $z'=5\,z-4a$

F هو تحاك نسبته 5 و مركزه هي النقطة الصامدة أي النقطة ذات اللحق : a أي النقطة A

- الحالة : $w=1$ ، $z'=z$ ، F هو التطبيق المطابق
- الحالة : $w=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ، $z'=e^{\frac{\pi}{3}i}z+a-ae^{\frac{\pi}{3}i}$ أي : $z'-a=e^{\frac{\pi}{3}i}(z-a)$

	F هو الدوران الذي مركزه A و زاويته $\frac{\circledR}{3}$		
	$w=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ، $M(m)$ و $N(n)$ و $P(p)$ ، $M=F(B)$ ، $C=F(N)$ ، $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}$		2
	$M=F(B) \Rightarrow m=wb+(1-w)a$	أ)	
	لدينا : $w^2-w+1=\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{3}{4}-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i+1=0$ منه : $w^2=w-1$ منه : $\frac{w-1}{w}=w$ لدينا $C=F(N)$ منه : $c=w(n-a)+a=wn+(1-w)a$ منه : $n=\frac{c-(1-w)a}{w}=\frac{c-wc+wc}{w}+\frac{w-1}{w}a=\frac{(1-w)c}{w}+c+wa=-wc+c+wa=w(a-c)+c$	ب)	
	لدينا : $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}$ منه : $p-a=m-a+n-a$ منه : $p=m+n-a=wb+(1-w)a+w(a-c)+c-a=wb+(1-w)c$	ج)	
	لدينا $p=wb+(1-w)c=w(b-c)+c$ منه : $P=R\left(C,\frac{\circledR}{3}\right)(B)$ بالتالي PBC مثلث متساوي الأضلاع	د)	