

التمرين الأول

(1) أ) نفترض أن $a = i\bar{a}$ إذن $a - i\bar{a} = 2a$ و $a - i\bar{a} = 2a$ و $i|a|^2 = ia\bar{a} = -a^2$ و منه:

$$(E) \Leftrightarrow z^2 - 2az + a^2 = 0 \Leftrightarrow (z - a)^2 = 0 \Leftrightarrow (z + i\bar{a})^2 = 0 \Leftrightarrow (z + i\bar{a}) = 0$$

نستنتج أن

$$(E) \Leftrightarrow (z + i\bar{a}) = 0$$

(ب) لدينا $a + i$ حل للمعادلة (E) يكافئ على التوالي:

$$(a + i)^2 + (a - i\bar{a})(a + i) - i|z|^2 = 0$$

$$a^2 + 2ia - 1 - (a^2 + ai - ia\bar{a} + \bar{a}) - ia\bar{a} = 0$$

$$ai - 1 - \bar{a} = 0$$

$$\operatorname{Re}(a)i - \operatorname{Im}(a) - 1 - \operatorname{Re}(a) + i\operatorname{Im}(a) = 0$$

$$\operatorname{Re}(a) + \operatorname{Im}(a) = -1 \text{ و } \operatorname{Re}(a) + \operatorname{Im}(a) = 0$$

العبارة الاخيرة خاطئة إذن $(a + i)^2 + (a - i\bar{a})(a + i) - i|z|^2 \neq 0$ و منه:

$$(E) \text{ ليس حل للمعادلة } (E)$$

(2) أ) حساب مميز المعادلة (E) :

$$\Delta = (a - i\bar{a})^2 + 4i|a|^2 = a^2 - 2ia\bar{a} + (i\bar{a})^2 + 4ia\bar{a} = a^2 + 2ia\bar{a} + (i\bar{a})^2 = (a + i\bar{a})^2$$

إذن

$$\Delta = (a + i\bar{a})^2$$

(ب) بما أن $\bar{a} \neq ia \Rightarrow a \neq i\bar{a} \Rightarrow \Delta \neq 0$ فإن للمعادلة (E) حلين عقديين مختلفين هما:

$$z_1 = \frac{a - i\bar{a} + a - i\bar{a}}{2} = a = [|a|, \theta] \text{ و } z_2 = \frac{a - i\bar{a} - a + i\bar{a}}{2} = i\bar{a} = \left[|a|, -\frac{\pi}{2} - \theta \right]$$

إذن حلي المعادلة على الشكل المثلثي هما:

$$\left[|a|, -\frac{\pi}{2} - \theta \right] \text{ و } \left[|a|, \theta \right]$$

$$OB = |-i\bar{a}| = |-i| \times |\bar{a}| = |a| \text{ و } OA = |a| \text{ (3) أ) لدينا:}$$

إذن

$$OA = OB$$

$$\overline{(OB, OA)} \equiv \operatorname{Arg}\left(\frac{a}{-i\bar{a}}\right) \equiv \operatorname{Arg}\left(\frac{ia^2}{aa}\right) \equiv \operatorname{Arg}(i) + 2\operatorname{Arg}(a) - \operatorname{Arg}(a\bar{a}) \equiv \frac{\pi}{2} + 2\theta [2\pi] \text{ و لدينا}$$

إذن

$$\overline{(OB, OA)} \equiv \frac{\pi}{2} + 2\theta [2\pi]$$

(ب) لدينا $a \neq 0$ و $a \neq -\bar{a}$ إذن النقط O و A و B مختلفة مثنى مثنى و منه

$$\overline{(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA})} \equiv \frac{\pi}{2} + 2\theta [2\pi] \text{ ونعلم أن } \overline{(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA})} \equiv 0 [\pi] \text{ يكافئ (النقط } O \text{ و } A \text{ و } B \text{ مستقيمية)}$$

$$\theta \equiv \frac{-\pi}{4} \left(\frac{\pi}{2} \right) \text{ يعني } \frac{\pi}{2} + 2\theta \equiv 0 [\pi] \text{ يكافئ (النقط } O \text{ و } A \text{ و } B \text{ مستقيمية)}$$

وبما أن $\theta \in]-\pi, \pi[$ فإن القيم الممكنة ل θ هي $\theta \in \left\{ -\frac{\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{4} \right\}$ و منه :

القيم الممكنة ل θ بحيث تكون النقط O و A و B مستقيمية هي $\frac{-3\pi}{4}, \frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$

$$(OA) \perp (OB) \Leftrightarrow \overline{(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA})} \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + 2\theta \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \Leftrightarrow \theta \equiv 0 \left[\frac{\pi}{2} \right] \text{ لدينا (ج)}$$

وبما أن $\theta \in]-\pi, \pi[$ فإن القيم الممكنة ل θ هي $\theta \in \left\{ -\frac{k\pi}{2} / k \in \{-1, 0, 1\} \right\}$.

خلاصة :

القيم الممكنة ل θ بحيث يكون $(OA) \perp (OB)$ هي $\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{0}, \frac{\pi}{2}$

(4) أ) بما أن $\theta \notin \left\{ \frac{-3\pi}{4}, \frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right\}$ فإن النقط O و A و B غير مستقيمية

$$\text{لدينا : } \text{aff}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \text{aff}(\overrightarrow{OA}) + \text{aff}(\overrightarrow{OB}) = a - i\bar{a} = \text{aff}(\overrightarrow{ON})$$

إذن $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{ON}$ وهذه هي الخاصية المميزة لمتوازي أضلاع و منه

الرباعي $OANB$ متوازي أضلاع

(ب) بما أن النقط O و A و B و N غير مستقيمية و مختلفة مثنى مثنى فإن

$$\Leftrightarrow \frac{\text{aff}(A) - \text{aff}(O)}{\text{aff}(A) - \text{aff}(B)} \times \frac{\text{aff}(N) - \text{aff}(B)}{\text{aff}(N) - \text{aff}(O)} \in \mathbb{R}^* \text{ (النقط } O \text{ و } A \text{ و } B \text{ و } N \text{ متداورة)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{a + ia} \times \frac{a - i\bar{a} + i\bar{a}}{a - i\bar{a}} \in \mathbb{R}^*$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{a^2 + a^2} \in \mathbb{R}^*$$

$$\Leftrightarrow a^2 \in \mathbb{R}^*$$

$$\Leftrightarrow a^2 = \bar{a}^2$$

$$\Leftrightarrow a = \bar{a} \text{ أو } a = -\bar{a}$$

$$\Leftrightarrow \text{Re}(a) = 0 \text{ أو } \text{Im}(a) = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{Re}(a) \times \text{Im}(a) = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{Re}(a) \times \text{Im}(a) = 0 \text{ (النقط } O \text{ و } A \text{ و } B \text{ و } N \text{ متداورة)}$$

التمرين الأول (3 ج)

مجموعة النقط $A(a)$ بحيث تكون النقط O و A و B و N متداورة هي مجموعة النقط $A(a)$ بحيث $\operatorname{Re}(a) \times \operatorname{Im}(a) = 0$

لنرمز لهذه المجموعة ب E لدينا $E = \{A(a); \operatorname{Re}(a) = 0\} \cup \{A(a); \operatorname{Im}(a) = 0\}$ حيث $a \in \mathbb{C}^*$

إذن

E هي اتحاد محوري المعلم محروم من الأصل

التمرين الثاني

$$(1) \text{ أ) لدينا } (\forall z \in \mathbb{C} - \{i\}); f(z) - 1 = \frac{\bar{z} - i}{z + i} - 1 = \frac{\bar{z} - i - \bar{z} - i}{z + i} = \frac{-2i}{z + i}$$

إذن

$$(\forall z \in \mathbb{C} - \{i\}); f(z) - 1 = \frac{-2i}{z + i}$$

بما أن $f(z) \neq 1$ فإن $\operatorname{aff}(M'(f(z))) \neq \operatorname{aff}(A)$ ومنه :

$M' \neq A$

$$\text{ب) لدينا } \left\{ \begin{array}{l} AM' \times BM = |f(z) - 1| \times |z - i| = \left| \frac{-2i}{z + i} \right| \times |\bar{z} + i| = 2 \\ \overline{(AM', BM)} \equiv \operatorname{Arg} \left(\frac{z - i}{f(z) - 1} \right) \equiv \operatorname{Arg} \left(\frac{\bar{z} + i(\bar{z} + i)}{-2i} \right) \equiv 0 + \operatorname{Arg}(2i) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} AM' \times BM = 2 \\ \overline{(AM', BM)} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{array} \right.$$

(ج) $M \in \Gamma(B, 1)$ يعني $MB = 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} AM' = 2 \\ (AM') \perp (BM) \end{array} \right. \text{ نستنتج حسب السؤال السابق أن}$$

نستنتج أن

M' هي نقطة تقاطع (الدائرة ذات المركز A و الشعاع 2) و (المستقيم العمودي على (BM) و المار من A) بحيث تكون الزاوية $\overline{(AM', BM)}$ مباشرة.

(د) لنبين أن $BM = 1$

$$\text{إذن } BM = \left| \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)i - i \right| = \left| \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$M \in (\Gamma)$$

$$\forall \theta \in]0, 2\pi[; \forall z \in \mathbb{C} - \{i\} \quad (2)$$

$$f(z) = e^{i\theta} \Leftrightarrow \frac{\bar{z} - i}{z + i} = e^{i\theta} \Leftrightarrow z + i = (z - i)e^{-i\theta} \Leftrightarrow z = \frac{i(e^{-i\theta} + 1)}{e^{-i\theta} - 1} \quad \text{لدينا}$$

$$\frac{i(e^{-i\theta} + 1)}{e^{-i\theta} - 1} = i \frac{e^{-\frac{i\theta}{2}} + e^{\frac{i\theta}{2}}}{e^{-\frac{i\theta}{2}} - e^{\frac{i\theta}{2}}} = i \frac{2 \cos \frac{\theta}{2}}{-2i \sin \frac{\theta}{2}} = -\cot an \frac{\theta}{2} \quad \text{ولدينا}$$

إن

$$f(z) = e^{i\theta} \Leftrightarrow z = -\cot an \frac{\theta}{2}$$

$$(3) \text{ أ) ليكن } [r, \theta] \text{ جذرا مكعبا } \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i) \text{ لدينا}$$

$$[r, \theta]^3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i) \Leftrightarrow [r^3, 3\theta] = \left[1, \frac{3\pi}{4}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} r^3 = 1 \\ 3\theta = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi / k \in \{0, 1, 2\} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \theta = \frac{(3 + 8k)\pi}{12} \\ k \in \{0, 1, 2\} \end{cases}$$

الجذور المكعبة ل $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i)$ هي

$$\left[1, \frac{\pi}{4}\right]; \left[1, \frac{11\pi}{12}\right]; \left[1, \frac{19\pi}{12}\right]$$

$$(ب) \text{ لدينا: } 2(\bar{z} - i)^3 = \sqrt{2}(-1 + i)(\bar{z} + i)^3 \Leftrightarrow \left(\frac{\bar{z} - i}{\bar{z} + i}\right)^3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i) \Rightarrow (f(z))^3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i)$$

نستنتج أن $f(z)$ هو أحد الجذور المكعبة ل $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i)$ ومنه $f(z) \in \left\{e^{i\frac{\pi}{4}}; e^{i\frac{11\pi}{12}}; e^{i\frac{19\pi}{12}}\right\}$ وحسب السؤال (2)

$$z \in \left\{-\cotan \frac{\pi}{8}; -\cotan \frac{11\pi}{24}; -\cotan \frac{19\pi}{24}\right\}$$

تحديد قيم الحلول

$$1 = \tan \frac{\pi}{4} = \tan 2 \frac{\pi}{8} = \frac{2 \tan \frac{\pi}{8}}{1 - \tan^2 \frac{\pi}{8}} \Leftrightarrow \tan^2 \frac{\pi}{8} + 2 \tan \frac{\pi}{8} - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\tan \frac{\pi}{8} - 1\right)^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow \tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$$

$$x^2 + 2(2 + \sqrt{3})x - 1 = 0 \text{ نحصل على } x = \tan \frac{\pi}{24} \text{ بوضع } 2 - \sqrt{3} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = \tan \frac{\pi}{12} = \frac{2 \tan \frac{\pi}{24}}{1 - \tan^2 \frac{\pi}{24}}$$

الحل الموجب لهذه المعادلة هو $-(2 + \sqrt{3}) + 2\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ نستنتج أن $\tan \frac{\pi}{24} = -(2 + \sqrt{3}) + 2\sqrt{2 + \sqrt{3}}$

$$\tan \frac{11\pi}{24} = \tan \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{24} \right) = \cotan \frac{\pi}{24} = \frac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{3}} - (2+\sqrt{3})} = 2\sqrt{2+\sqrt{3}} + 2 + \sqrt{3} \text{ لدينا}$$

$$\cotan \frac{11\pi}{24} = \frac{1}{\tan \frac{\pi}{24}} = 2\sqrt{2+\sqrt{3}} - (2+\sqrt{3}) \text{ و لدينا}$$

$$\tan \frac{19\pi}{24} = \tan \left(\pi - \frac{5\pi}{24} \right) = -\tan \frac{5\pi}{24} = -\tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{24} \right) = \frac{\tan \frac{\pi}{24} - 1}{1 + \tan \frac{\pi}{24}} = \frac{(3+\sqrt{3}) - 2\sqrt{2+\sqrt{3}}}{(1+\sqrt{3}) - 2\sqrt{2+\sqrt{3}}} \text{ و}$$

$$\cotan \frac{19\pi}{24} = \frac{(1+\sqrt{3}) - 2\sqrt{2+\sqrt{3}}}{(3+\sqrt{3}) - 2\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \sqrt{3} + 2 - 2\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

مجموعة حلول المعادلة المقترحة هي إذن:

$$S = \left\{ -2\sqrt{2+\sqrt{3}} - 2 - \sqrt{3}; (2+\sqrt{3}) - 2\sqrt{2+\sqrt{3}}; 2\sqrt{2+\sqrt{3}} - 2 - \sqrt{3} \right\}$$