فرض رقم 2

التمرين الأول :

لتكن $(U_n)_n$ متتالية معرفة بما يلي :

$U_n = \sum_{p=0}^{p=2n+1} \frac{n}{n^2+p}$ لكل عدد طبيعي غير منعدم n

1) بين أن $2 - \frac{2}{n+1} \leq U_n \leq 2 + \frac{2}{n}$ $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)$

2) أ- تحقق أن $\sqrt{n} - \sqrt{n-1} \geq \frac{1}{2n}$ $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)$

ب- استنتج أن $\sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{p} \leq 2\sqrt{n}$ $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)$

3) نضع $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} U_k$ لكل عدد طبيعي غير منعدم n

بين أن $2n - 4\sqrt{n+1} \leq S_n \leq 2n + 4\sqrt{n}$ $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)$

و حدد $\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n}$

التمرين الثاني :

لتكن $(U_n)_n$ متتالية هندسية حدودها غير منعدمة أساسها q .

لكل عدد طبيعي n نضع : $S = U_0 + U_1 + ... + U_{n-1}$

و $P = U_0 U_1 .... U_{n-1}$ و $T = \frac{1}{U_0} + \frac{1}{U_1} + ... + \frac{1}{U_{n-1}}$

1) بين أن $\frac{S}{T} = U_0^2 \, q^{n-1}$

2) استنتج أن $P^2 = \left(\frac{S}{T}\right)^n$

التمرين الثالث :

نعتبر المتتاليتين $(U_n)_n$ و $(V_n)_n$ المعرفتين بما يلي : $U_n = \sum_{k=0}^{k=2n+1} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ و $V_n = \sum_{k=0}^{k=2n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$

1) بين أن $(U_n)_n$ و $(V_n)_n$ متحاذيتين

2) نضع $f_n(x) = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$

أ- بين أن $f_n'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2}$

ب- أثبت أن $f_{2n+1}(x) \leq \arctan x \leq f_{2n}(x)$ $\left(\forall x \in \mathbb{R}^+\right)$

ج- استنتج نهاية كل من المتتاليتين $(U_n)_n$ و $(V_n)_n$

التمرين الرابع :

لكل عدد طبيعي n أكبر أو يساوي 3 نضع $f_n(x) = x^n - n(x-1) - 2$ لكل x من $\mathbb{R}^+$

1) بين أن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حلين u_n و v_n حيث أن $u_n < 1 < v_n$

2) أ- أدرس إشارة $f_{n+1}(x) - f_n(x)$

ب- أدرس رتابة المتتالية $(u_n)_n$ و استنتج أنها متقاربة

ج- بين أن $\frac{-2}{n} \leq u_n - 1 \leq \frac{-1}{n}$: $(\forall n \geq 3)$ ثم حدد $\lim_{n\to+\infty} u_n$

3) أ- أدرس رتابة المتتالية $(v_n)_n$ و استنتج أنها متقاربة

ب- بين أن $v_n > 1 + \frac{1}{n}$ $(\forall n \geq 3)$ (نعطي $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$ $(\forall n \geq 3)$)

ب- بين أن $(\forall a > 0)\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right) (1+a)^n \geq 1 + na + \frac{n(n-1)}{2} a^2$

ج- أحسب $f_n\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ و استنتج أن $v_n < 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}$ $(\forall n \geq 3)$

د- حدد نهاية المتتالية $(v_n)_n$