14-2015	فرض رقم 2	2 bac SM

التمرين الأول:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[1,+\infty[$ بما يلي :

$$f(1)=1 \quad \text{و} \quad f(x)=\frac{\arctan\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}} \quad ; \quad x>1$$

1) أ- بين أن f متصلة على يمين النقطة $x_0=1$

ب- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و أعط تأويلا هندسيا للنتيجة

2) ليكن X من المجال $]0,+\infty[$ و نضع : $\varphi(t)=t^3(arx\tan X-X)-X^3(\arctan t-t)$

أ- بين أن φ قابلة للاشتقاق على المجال $]0,X[$ و أحسب المشتقة $\varphi'(t)$

ب- بين أن $\frac{\arctan X-X}{X^3}=\frac{-1}{3(1+c^2)}$ $\left(\exists c\in]0,X[\right)$

ج- استنتج أن $\lim\limits_{\substack{X\to0\\X>0}}\frac{\arctan X-X}{X^3}=-\frac{1}{3}$

3) أد رس قابلية اشتقاق الدالة f على يمين النقطة $x_0=1$ ضع $X=\sqrt{x-1}$

4) أ- باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية بين أن : $\arctan X\geq\frac{X}{1+X^2}$ $\left(\forall X\in\mathbb{R}^+\right)$

ب- بين أن $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{(x-1)^3}}\left(\frac{\sqrt{x-1}}{x}-\arctan\sqrt{x-1}\right)$ $\left(\forall x\in]1,+\infty[\right)$

ج- استنتج أن f تناقصية على $[1,+\infty[$

5) أرسم المنحنى (C_f)

التمرين الثاني:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $I=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ بمايلي : $f(x)=\sin x$

1) بين أن f تقابل من I نحو مجال J يتم تحديده

2) لتكن f^{-1} التقابل العكسي للدالة f .

بين أن f^{-1} قابلة للاشتقاق على المجال $]-1,1[$ و أن $\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

3) نضع $F(x)=2f^{-1}\left(\sqrt{x}\right)-f^{-1}(2x-1)$

أ- بين أن مجموعة تعريف الدالة F هي $D=[0,1]$

ب- بين أن F قابلة للاشتقاق على $]0,1[$ و أن $F'(x)=0$

ج- استنتج أن $2f^{-1}\left(\sqrt{x}\right)=\frac{\pi}{2}+f^{-1}(2x-1)$ $\left(\forall x\in[0,1]\right)$