السنة 2 بكالوريا علوم رياضية	الاشتقاق / دراسة الدوال / المتتاليات	فروض النجاح استعدادا لاجتياز فروضك

فرض تجريبي من اقتراح أذ سمير لخريسي - مدة الانجاز ساعتان

تمرين 1 :

I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $]-1\,;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=2\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x+1}\right)-\frac{x}{x^2+2x+2}$

أحسب : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ x>-1}} g(x)$

1) احسب $g'(x)$ لكل $x\in]-1\,;+\infty[$ ثم ضع جدول تغيرات g

2) استنتج إشارة g على $x\in]-1\,;+\infty[$

II) أ) بين أن : $\forall x\in[0;+\infty[\quad 0\le x-\operatorname{Arctan}x\le\frac{1}{3}x^3$

ب) استنتج حساب النهاية : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ x>0}}\frac{x-\operatorname{Arctan}x}{x^2}$

III) نعتبر الدالة العددية f المعرفة كما يلي : $\begin{cases} f(x)=\frac{-2}{®}x^2\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x+1}\right)+2 & ;x>-1\\ f(x)=-\sqrt[3]{-x^3-x^2}+1 & ;x\le-1\end{cases}$

وليكن (Cf) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم.

1) بين أن $Df=IR$

2) بين أن f متصلة على IR

3) بين أن f قابلة للاشتقاق يمين -1 و أن : $f'_d(-1)=2+\frac{2}{®}$ (استعمل الخاصية : $\forall t>0\ \operatorname{Artctan}\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{®}{2}-\operatorname{Artctan}(t)$)

4) أدرس قابلية اشتقاق f يسار -1 و أول النتيجة المحصل عليها هندسيا.

5) بين أن (Cf) يقبل مقاربا مائلا معادلته $(\Delta_1):\ y=\frac{-2}{®}x+\frac{2}{®}+2$ جوار $+\infty$ (يمكنك وضع : $t=\frac{1}{x+1}$)

6) بين أن (Cf) يقبل مقاربا مائلا معادلته $(\Delta_2):\ y=x+\frac{4}{3}$ جوار $-\infty$

7) تحقق أن : $\forall x\in]-1;+\infty[\ f'(x)=\frac{-2x}{®}g(x)$ و $\forall x\in]-\infty;-1[\ f'(x)=\frac{x(3x+2)}{3\left(\sqrt[3]{-x^3-x^2}\right)^2}$

8) أوجد جدول تغيرات الدالة f

9) أنشئ (Cf) (نقبل أن (Cf) يقطع محور الأفاصيل في نقطتين أفصولاهما $4\approx$ ~ و $-1{,}5\approx$)

تمرين 2 : لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $u_0=1$ و $(\forall n\in IN)\quad u_{n+1}=1+\frac{1}{u_n}$

1) بين أن : $(\forall n\in IN)\quad u_n\ge1$

2) نعتبر المتتاليتين (v_n) و (w_n) المعرفين بما يلي : $v_n=u_{2n}$ و $w_n=u_{2n+1}$ لكل $n\in IN$

أ) بين بالترجع أن (v_n) تزايدية و أن (w_n) تناقصية.

ب) بين أن : $(\forall n\in IN)\quad |v_{n+1}-w_{n+1}|\le\frac{1}{4}|v_n-w_n|$

ج) بين أن (v_n) و (w_n) متحاذيتان

د) استنتج أن (u_n) متقاربة محددا نهايتها.