التمرين الأول

أحسب النهايات التالية : $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^3-1}{x+1}} - \sqrt[3]{\frac{x^5+1}{x^2-2x}}$

$\lim_{x\to0} \frac{\sin\left(E\left(x^2\right)\right)}{x^2}$ ، $\lim_{x\to1} \frac{1-\sqrt{2-\sqrt{4-3x}}}{1-\sqrt{2-\sqrt{\frac{1}{3-2x}}}}$

بين أن $\lim_{x\to a} \frac{\sqrt{a}\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}\sqrt[3]{a}}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{a}} = -\frac{2}{3}\sqrt[12]{a^7}$ (حيث $a>0$)

التمرين الثاني

نعتبر الدالة $f(x) = x\sqrt{\left(E\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2 - E\left(\frac{1}{x}\right)}$

1) أ- بين أن :

$$\left(\forall x \in \left]0,\frac{1}{2}\right[\right) \quad \sqrt{(1-x)(1-2x)} \le f(x) \le \sqrt{1-x}$$

ب- استنتج $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)$

2) هل الدالة f تقبل نهاية في النقطة $x_0 = 0$

التمرين الثالث

ليكن α ; β عددان من $\mathbb{Q}^{+*}$ و بحيث $\alpha+\beta=1$

1) نعتبر الدالة العددية φ المعرفة على المجال $[0,1]$

بما يلي : $\varphi(x) = x^{\alpha} - \alpha x - \beta$

أ- أدرس منحى تغيرات الدالة φ

ب- أنجز جدول تغيرات الدالة φ و استنتج أن :

$$x^{\alpha} \le \alpha x + \beta \quad (\forall x \in [0,1])$$

2) بين أن $x^{\alpha} y^{\beta} \le \alpha x + \beta y \quad \left(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^{+*2}\right)$

تطبيق : بين أن لكل عددين a , b من $\mathbb{R}^{+*}$ لدينا :

$$\sqrt[5]{a^2b^3} \le \frac{2a+3b}{5}$$

التمرين الرابع

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $I = \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

بمايلي : $f(x) = \sin x$

1) بين أن f تقابل من I نحو مجال J يتم تحديده

و ليكن f^{-1} تقابله العكسي

2) بين أن :

$$\left(\forall x \in \left]-1,1\right[\right) \quad f^{-1}(x) = \frac{\pi}{2} - 2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

التمرين الخامس

(I) لتكن U , V دالتين متصلتين و قابلتين على $\mathbb{R}^{+}$ و بحيث $U(0) = V(0) = 0$ و $V(x) \ne 0 \quad \left(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}\right)$

و $V'(x) \ne 0 \quad \left(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}\right)$. ليكن x من $\mathbb{R}^{+*}$ و نضع $\varphi(t) = U(t)V(x) - U(x)V(t)$.

بتطبيق مبرهنة روول بين أن : $\frac{U(x)}{V(x)} = \frac{U'(c)}{V'(c)} \quad \left(\exists c \in \left]0,x\right[\right) \quad (\aleph)$

(II) 1) باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية بين أن $y < \tan y \quad \left(\forall y \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[\right)$

2) لتكن f الدالة المعرفة على $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ بما يلي : $t \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$; $f(t) = \frac{\sin t}{t}$ و $f(0) = 1$

أ- أدرس اتصال الدالة f على المجال $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

ب- بين أن f تناقصية قطعا على $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

3) ليكن x من المجال $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$. باستعمال العلاقة $(\aleph)$ و رتابة الدالة f بين أن : $\frac{\sin x}{6x} \le \frac{x-\sin x}{x^3} \le \frac{1}{6}$

و استنتج $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{x-\sin x}{x^3}$