ثانوية الجولان التأهيلية
بيوكرى

السنة الثانية بكالوريا
علوم رياضية

السنة الدراسية :
2010 – 2011

فرض محروس رقم :01

الأستاذ : أحمد مومنى

سلم التنقيط

التمرين رقم : 01 (6 ن)

نضع : $\lambda = Arc\tan\left(\frac{1}{2}\right) + Arc\tan\left(\frac{1}{5}\right) + Arc\tan\left(\frac{1}{8}\right)$

و لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\pi}{4} + Arc\tan\left(\frac{1-\sin x}{\sin(\cos x)}\right) & ; \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ f(x) = Arc\tan\left(\dfrac{E\left(\frac{2}{2x-\pi}\right) - x + \frac{\pi}{2}}{E\left(\frac{2}{2x-\pi}\right) + x - \frac{\pi}{2}}\right) & ; \quad \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lambda \end{cases}$$

1 - أ - بين أن : $\lim_{t\to 0} t\left(E\left(\frac{1}{t}\right) - t\right) = 1$ و $\lim_{t\to 0} t\left(E\left(\frac{1}{t}\right) + t\right) = 1$ — 1 ن

ب - استنتج : $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} f(x)$ — 1,5 ن

2 - تحقق أن لكل x من $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$: $\frac{1-\sin x}{\sin(\cos x)} = \frac{\cos x}{1+\sin x}\left(\frac{\cos x}{\sin(\cos x)}\right)$ ثم أستنتج $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x)$ — 1,5 ن

3 - بين ان f متصلة في النقطة $\frac{\pi}{2}$ — 2 ن

التمرين رقم : 02 (5,5 ن)

لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال]-1,1] بما يلي: $f(x) = 2Arc\tan\left(\sqrt{\frac{2}{1+x}} - 1\right)$

1- بين أن: $0 \le f(x) < \pi$ لكل x من المجال]-1,1] — 0,25 ن

2- ليكن x من المجال]-1,1]

a – بين أن: $1 - \tan^2\left(\frac{f(x)}{2}\right) = x\left(1 + \tan^2\left(\frac{f(x)}{2}\right)\right)$ — 2 ن

b - استنتج أن لكل x من المجال]-1,1] : $\sin\left(\frac{\pi}{2} - f(x)\right) = x$ — 1,25 ن

3 - a - بين أن : $x < y \Rightarrow f(x) - x > f(y) - y \quad \left(\forall (x,y) \in (]-1,1])^2\right)$ — 0,5 ن

b - بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال]0,1[بحيث : $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}$ — 1,5 ن

التمرين رقم : 03 (8,5 ن)

I) – ليكن $n \in \mathbb{N}^*$

نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $f_n(t) = \left(t^n + t^{n-1} + \cdots + t\right) - 1$

1– أ – بين أن لكل n من $\mathbb{N}^*$ الدالة العددية f_n تقبل دالة عكسية f_n^{-1} معرفة على المجال $[-1,+\infty[$ — 0,5 ن

ب – بين أن المعادلة $f_n(t) = 0$ تقبل حلا وحيدا u_n في المجال $]0,+\infty[$ — 0,5 ن

ج – أحسب كل من u_1 و u_2 — 0,75 ن

2 – أ – بين أن لكل n من $\mathbb{N}^*$: $f_{n+1}(u_n) > 0$ — 0,5 ن

ب – استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ تناقصية قطعا — 0,75 ن

3 – تحقق أن : $\frac{3}{4} < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ثم استنتج أن : $0 < u_n \leq \frac{3}{4} \quad \left(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}\right)$ — 0,5 ن

4 – أ – بين أن : $u_n^{n+1} = 2u_n - 1 \quad \left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)$ — 1,5 ن

ب – حدد $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^{n+1}$ — 0,25 ن

ج – استنتج أن ألمتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متقاربة و حدد نهايتها — 0,5 ن

II) – لتكن $(V_n)_{n\geq 1}$ المتتالية العددية المعرفة كما يلي : $V_n = \frac{1}{2}u_n^{n+1} \quad \left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)$

1 - أ – تحقق أن : $0 < V_n \leq \frac{1}{4} \quad \left(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}\right)$ — 0,25 ن

ب – استنتج أن : ألمتتالية $(V_n)_{n\geq 1}$ متقاربة — 0,5 ن

2 – بين أن : $(1+2V_n)^{n+1} = 2^{n+2} \times V_n \quad \left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)$ — 1 ن

3 – استنتج أن : $0 < 2V_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} \quad \left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)$ ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$ — 1 ن

AHMED MOUMNI