استعدادا لاجتياز فروضك	اتصال دالة / المتتاليات حلول مقترحة	السنة 2 بكالوريا علوم رياضية

فرض تجريبي من اقتراح أذ سمير لخريسي - مدة الانجاز ساعتان

تمرين 1 : احسب النهايات التالية:

نضع : $t=\sqrt[6]{x}$ منه : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{t^3-t^2}{t^3+t^2}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{t^3}{t^3}=1$

$$\lim_{x\to1}\frac{x^4\sqrt[3]{x+7}-2}{1-x^2}=\lim_{x\to1}\frac{x^4\left(\sqrt[3]{x+7}-2\right)+2x^4-2}{1-x^2}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x^4(x+7-8)}{(1-x)(1+x)\left(\left(\sqrt[3]{x+7}\right)^2+2\sqrt[3]{x+7}+4\right)}+2\frac{(x^2-1)(x^2+1)}{1-x^2}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{-x^4}{(1+x)\left(\left(\sqrt[3]{x+7}\right)^2+2\sqrt[3]{x+7}+4\right)}-2(x^2+1)=\frac{-1}{2\times12}-4=\frac{-97}{24}$$

لدينا :
$$\lim_{x\to1}\frac{\text{Arctan}(x)-\text{Arctan}(1)}{\text{Arctan}(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{\dfrac{\text{Arctan}(x)-\text{Arctan}(1)}{x-1}}{\dfrac{\text{Arctan}(x-1)}{x-1}}$$

نضع : $\text{Arctan}(x-1)=u$ فنجد: $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\text{Arctan}(x-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{u}{\tan(u)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\dfrac{\tan(u)}{u}}=\dfrac{1}{1}=1$

و نضع : $\text{Arctan}(x)=v$ فنجد:

$$\lim_{x\to1}\frac{\text{Arctan}(x)-\text{Arctan}(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{v-\frac{\pi}{4}}{\tan(v)-\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{\dfrac{\tan(v)-\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}{v-\frac{\pi}{4}}}=\frac{1}{\tan'\left(\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{\tan^2\left(\frac{\pi}{4}\right)+1}=\frac{1}{2}$$

بالتالي : $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\text{Arctan}(x)-\text{Arctan}(1)}{\text{Arctan}(x-1)}=\dfrac{1}{2}$

تمرين 2 : نعتبر الدالة العددية المعرفة كما يلي : $f(x)=\text{Arctan}\left(\dfrac{2x}{|x^2-1|}\right)$

1) لدينا: $Df=\{x\in IR\ /\ x^2-1\neq0\}=]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$

الآن لدينا من جهة $x\in Df\Rightarrow x^2\neq1\Rightarrow(-x)^2\neq1\Rightarrow -x\in Df$

و من جهة أخرى: $f(-x)=\text{Arctan}\left(\dfrac{-2x}{|(-x)^2-1|}\right)=-2\text{Arctan}\left(\dfrac{2x}{|x^2-1|}\right)=-f(x)$ ، $\forall x\in Df$ بالتالي : f دالة فردية

2) لدينا: $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\text{Arctan}\left(\dfrac{2x}{|x^2-1|}\right)=\dfrac{\pi}{2}$

(لأن: $\lim\limits_{x\to 1}|x^2-1|=0^+$ منه: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x}{|x^2-1|}=+\infty$ مع العلم أن: $\lim\limits_{y\to +\infty}\text{Arctan}(y)=\dfrac{\pi}{2}$)

وأيضا: $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\text{Arctan}\left(\dfrac{2x}{|x^2-1|}\right)=-\dfrac{\pi}{2}$

إذن: f تقبل تمديدا بالاتصال معرف كما يلي:

$$\begin{cases} g(x)=\text{Arctan}\left(\dfrac{2x}{|x^2-1|}\right)\ ;\ |x|\neq 1 \\ g(1)=\dfrac{\pi}{2};\quad g(-1)=\dfrac{-\pi}{2}\end{cases}$$

3) لدينا:

$$\forall x\in[0;1[\quad \tan(2\,\text{Arctan}(x))=\frac{2\tan(\text{Arctan}(x))}{1-\tan^2(\text{Arctan}(x))}=\frac{2x}{1-x^2}=\frac{2x}{|1-x^2|}=\tan(f(x))$$

$$\forall x\in]1;+\infty[\quad \tan(\pi-2\,\text{Arctan}(x))=\tan(-2\,\text{Arctan}(x))=-\tan(2\,\text{Arctan}(x))=\frac{2x}{x^2-1}=\frac{2x}{|1-x^2|}=\tan(f(x))$$

ولدينا: $x\in[0;1[\ \Rightarrow 0\leq \text{Arctan}(x)<\text{Arctan}(1)\ \Rightarrow 0\leq \text{Arctan}(x)<\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow 0\leq 2\text{Arctan}(x)<\dfrac{\pi}{2}$

و

$$x\in]1;+\infty[\ \Rightarrow \text{Arctan}(1)<\text{Arctan}(x)<\frac{\pi}{2}\ \Rightarrow\frac{\pi}{4}<\text{Arctan}(x)<\frac{\pi}{2}\Rightarrow\frac{\pi}{2}<2\text{Arctan}(x)<\pi$$

$$\Rightarrow -\pi<-2\text{Arctan}(x)<\frac{-\pi}{2}\Rightarrow\qquad 0<\pi-2\text{Arctan}(x)<\frac{\pi}{2}$$

ولكون الدالة: $x\mapsto \tan x$ تقابلا في المجال $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ فإننا نستنتج أن:

$$\forall x\in[0;1[\ \begin{cases}\tan(2\,\text{Arctan}(x))=\tan(f(x))\\ 0<f(x)<\dfrac{\pi}{2};\quad 0<2\,\text{Arctan}(x)<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}\Rightarrow\quad \forall x\in[0;1[\ \ f(x)=2\,\text{Arctan}(x)$$

$$\forall x\in]1;+\infty[\ \begin{cases}\tan(\pi-2\,\text{Arctan}(x))=\tan(f(x))\\ 0<f(x)<\dfrac{\pi}{2};\quad 0<\pi-2\,\text{Arctan}(x)<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}\Rightarrow\quad \forall x\in]1;+\infty[\ \ f(x)=\pi-2\,\text{Arctan}(x)$$

4) لدينا:

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{2\text{Arctan}(x)-\frac{\pi}{2}}{x-1}=\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}2\frac{\text{Arctan}(x)-\frac{\pi}{4}}{x-1}$$

$$=\lim_{\substack{t\to\frac{\pi}{4}\\ t<\frac{\pi}{4}}}2\frac{t-\frac{\pi}{4}}{\tan(t)-\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}=2\times\frac{1}{2}=1$$

((انظر التمرين الأول))

و $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} \dfrac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} \dfrac{\pi - 2\mathrm{Arctan}(x) - \frac{\pi}{2}}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} \dfrac{\frac{\pi}{2} - 2\mathrm{Arctan}(x)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} -2\,\dfrac{\mathrm{Arctan}(x)-\frac{\pi}{4}}{x-1} = -1$

إذن g قابلة للاشتقاق يمين و يسار 1 لكنها غير قابلة للاشتقاق في 1

وبذلك فمنحنى الدالة g يقبل نصفي مماس معادلتهما: $(\Delta_1):\begin{cases} y=(x-1)+\frac{\pi}{2} \\ x<1 \end{cases}$ و $(\Delta_2):\begin{cases} y=-(x-1)+\frac{\pi}{2} \\ x>1 \end{cases}$

---

5) لدينا : $\forall]1;+\infty[\quad f(x) = \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{2x}{x^2-1}\right) = \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{2}{\frac{x^2-1}{x}}\right) = \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{2}{x-\frac{1}{x}}\right)$

ليكن x و y عددين من $]1;+\infty[$ ، لدينا :

$$x>y \Rightarrow \frac{1}{x}<\frac{1}{y} \Rightarrow -\frac{1}{x}>-\frac{1}{y} \Rightarrow x-\frac{1}{x}>y-\frac{1}{y}>0$$

$$\Rightarrow \frac{2}{x-\frac{1}{x}}<\frac{2}{y-\frac{1}{y}} \Rightarrow \mathrm{Arctan}\left(\frac{2}{x-\frac{1}{x}}\right)<\mathrm{Arctan}\left(\frac{2}{y-\frac{1}{y}}\right)$$

$$\Rightarrow f(x)<f(y)$$

إذن f تناقصية قطعا على $]1;+\infty[$

و $\forall]0;1[\quad f(x) = \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{2x}{-x^2+1}\right) = \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{2}{-x+\frac{1}{x}}\right)$

ليكن x و y عددين من $]0;1[$ ، لدينا :

$$x>y \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x}<\frac{1}{y} \\ -x<-y \end{cases} \Rightarrow -x+\frac{1}{x}<-y+\frac{1}{y}<0 \quad \Rightarrow \frac{2}{x-\frac{1}{x}}>\frac{2}{y-\frac{1}{y}}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Arctan}\left(\frac{2}{-x+\frac{1}{x}}\right)>\mathrm{Arctan}\left(\frac{2}{-y+\frac{1}{y}}\right) \Rightarrow f(x)>f(y)$$

إذن f تزايدية قطعا على $]0;1[$

ستلاحظ أن التعريف يكفي في أحيان كثيرة لدراسة رتابة دالة خصوصا أن الدالة العكسية لدالة الظل (Arctan x) لم يتم تحديد مشتقتها في درس الاتصال و النهاية، بمعنى لا يمكن الآن استعمال الاشتقاق لدراسة الرتابة.

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$		$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	0

6) الدالة h متصلة على $[1;+\infty[$ و تناقصية قطعا عليه إذن فهي تقابل من I نحو

$$J=h([1;+\infty[)=\left]\lim_{x\to+\infty}h(x);h(1)\right]=\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$$

7) لدينا : $h(1)=\frac{\pi}{2}$ منه: $h^{-1}\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$ ، و لكل $x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

$$h^{-1}(x)=y \Leftrightarrow h(y)=x \Leftrightarrow \pi-2\mathrm{Arctan}(y)=x \Leftrightarrow \pi-2\mathrm{Arctan}(y)=x \Leftrightarrow \mathrm{Arctan}(y)=\frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow y=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}=\mathrm{cotan}\left(\frac{x}{2}\right)$$

خلاصة : $h(x)=\begin{cases}\mathrm{cotan}\left(\frac{x}{2}\right);x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[\\ h\left(\frac{\pi}{2}\right)=1\end{cases}$ أو أيضا: $\boxed{\forall x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right]\ h(x)=\mathrm{cotan}\left(\frac{x}{2}\right)}$ (لأن: $\mathrm{cotan}\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{2}\right)=1$)

<u>تمرين 3</u> : من أجل n عدد صحيح طبيعي غير منعدم نعتبر الدالة العددية :

$$f_n:\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow IR$$
$$x\longrightarrow \tan x-x-n$$

الدالة f_n قابلة للاشتقاق على $I=\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ و لدينا: $\forall x\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\ f_n'(x)=1+\tan^2(x)-1=\tan^2(x)\geq 0$

إذن فهي تزايدية على I و لكون المعادلة $f_n'(x)=0$ تقبل عددا معدودا من الحلول (الصفر فقط) فإننا نستنتج أن f_n تزايدية قطعا على I

x	$\frac{-\pi}{2}$ $\qquad\qquad$ $\frac{\pi}{2}$
$f_n'(x)$	$+$
$f_n(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

نعتبر المجال: $\left[0;\mathrm{Arctan}\left(n+\frac{\pi}{2}\right)\right]\subset I$ ، الدالة f_n متصلة عليه و لدينا: $f_n(0)=-n<0$

و
$$f_n\left(\mathrm{Arctan}\left(n+\frac{\pi}{2}\right)\right)=\tan\left(\mathrm{Arctan}\left(n+\frac{\pi}{2}\right)\right)-\mathrm{Arctan}\left(n+\frac{\pi}{2}\right)-n=n+\frac{\pi}{2}-\mathrm{Arctan}\left(n+\frac{\pi}{2}\right)-n$$
$$=\frac{\pi}{2}-\mathrm{Arctan}\left(n+\frac{\pi}{2}\right)>0$$

إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطة فإن المعادلة : $f_n(x)=0$ تقبل حلا α_n على الأقل في $\left[0;\mathrm{Arctan}\left(n+\frac{\pi}{2}\right)\right]$

إذن فهي تقبل حلا α_n على الأقل في I و بما أنها تزايدية قطعا على I فإن هذا الحل وحيد.

لدينا: $f_{n+1}(\alpha_{n+1})=0$ أي : $\tan(\alpha_{n+1})-\alpha_{n+1}-(n+1)=0$

و منه: $\tan(\alpha_{n+1})-\alpha_{n+1}-n=1$ أي $f_n(\alpha_{n+1})=1$

الآن لدينا: $f_n(\alpha_{n+1})=1$ و $f_n(\alpha_n)=0$ إذن: $f_n(\alpha_{n+1})>f_n(\alpha_n)$ ولكون f_n تزايدية قطعا فإننا نستنتج أن:
$\alpha_{n+1}>\alpha_n$ إذن: $(\alpha_n)_n$ تزايدية قطعا.

بما أن المتتالية $(\alpha_n)_{n\in IN}$ تزايدية قطعا ومكبورة ب $\frac{\pi}{2}$ (لأن: $\alpha_n \in I$) فهي متقاربة ولتكن ℓ نهايتها

لدينا: $\forall n\in IN \quad \tan(\alpha_n)-\alpha_n-n=0$ منه: $\forall n\in IN \quad \alpha_n=\text{Artan}(\alpha_n+n)$

بما أن: $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n=\ell$ فإن: $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n+n=+\infty$ منه: $\lim\limits_{n\to+\infty}\text{Arctan}(\alpha_n+n)=\frac{\pi}{2}$ بالتالي: $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n=\frac{\pi}{2}}$