التمرين الاول (7نقط)

ليكن n من N^* نعتبر الدالة العددية للمتغير الحقيقي والمعرفة بما يلي :

$$f_n(x)=\frac{e^x}{(x+1)^n}$$

و (C_n) منحنى f_n في معلم متعامد ممنظم $(o;\vec{i},\vec{j})$

I) نضع في هذا الجزء $n=1$

1) احسب نهايات f_1 عند محدات مجموعة تعريفها — 0,50

2) ادرس تغيرات f_1 وضع جدولا لها — 0,50

3) نعتبر الدالة العددية g المعرفةعلى $\mathbb{R}^+$ بما يلي : $g(x)=e^x-x^2-x$.

أ-ادرس تغيرات g' — 0,50

ب- بين ان المعادلة : $g'(x)=0$ تقبل حلين احدهما α ينتمي الى المجال $\left]1;\frac{3}{2}\right[$ — 0,50

ج- استنتج ان $g(x)\geq 0$ على $\mathbb{R}^+$ — 0,25

د- حدد الوضع النسبي بين (C_1) والمستقيم دو المعادلة : $(D):y=x$ على $\mathbb{R}^+$ — 0,50

ه-حدد الفروع اللانهائية ل (C_1) — 0,50

4) ليكن h قصور f_1 على $\mathbb{R}^+$

أ-بين ان h تقابل من $\mathbb{R}^+$ الى مجال J يتم تحديده — 0,50

ب- بين ان h^{-1} قابلة للاشتقاق في $\frac{e}{2}$ واحسب $(h^{-1})'(\frac{e}{2})$ — 0,50

5) انشئ (C_1) و $(C_{h^{-1}})$ (منحنى h^{-1}) — 0,50

II) ناخد في هذا الجزء $n\geq 2$

1) احسب نهايات f_n عند محدات مجموعة تعريفها — 0,50

2) أ-ادرس تغيرات f_n وحدد قيمتها الدنوية β_n — 0,50

ب-احسب $\lim_{n\to+\infty}\beta_n$ — 0,25

3) ادرس الوضع النسبي بين (C_n) و (C_{n+1}) — 0,50

4)انشئ (C_2) في نفس الشكل مع (C_1) — 0,50

التمرين الثاني(3نقط)

نعتبر المتتالية العددية (V_n) المعرفة بما يلي : $V_n=\sum_{k=0}^{k=n}\frac{Ln(1+k)}{1+k}$

1) حدد الدالة F الاصلية للدالة : $f:x\to\frac{Ln(x+1)}{x+1}$ واللتي تنعدم في 0 — 1

2) ليكن k عدد صحيح طبيعي و $k\geq 1$ — 1

باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية بين ان : $\frac{Ln(k+2)}{k+2}\leq F(k+1)-F(k)\leq\frac{Ln(k+1)}{k+1}$

3) استنتج : $\lim_{n\to+\infty}V_n$ — 1

تمرين 3 (5 نقط) (5 ن)

لكل z من $\mathbb{C}$ نضع : $P(z)=z^3-(5-2i)z^2+(5-4i)z-9-2i$

1) أ- بين أن المعادلة $P(z)=0$ تقبل حلا تخيليا صرفا يتم تحديده 0,50

ب- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-(5-3i)z+2-9i=0$ 0,50

ج- حدد حلول المعادلة : $P(z)=0$ من z $\mathbb{C}$ 0,50

2) المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{e}_1;\vec{e}_2)$ ولتكن النقط A و B و C و J ذات الألحاق i و $1-2i$ و $4-i$ و 2 على التوالي

أ- بين أن المثلث ABC متساوي الساقين وقائم الزاوية في B 0,50

ب- ليكن r الدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$. حدد لحق النقطة D صورة B بالدوران r 0,50

ج- لتكن (Γ) مجموعة النقط التي ألحاقها تكتب على الشكل $2+\sqrt{5}e^{i\alpha}$ حيث α يتغير في $\mathbb{R}$. حدد المجموعة (Γ) وبين أن $ABCD$ مربع تنتمي رؤوسه إلى (Γ) 1

3) لكل n من $\mathbb{N}$ ، نعتبر النقط M_n ذات اللحق z_n بحيث $z_0=4-i$ و $M_{n+1}=r(M_n)$

أ- تحقق أن : $z_n=(4-2i)i^n+i$ 0,75

ب- أحسب z_{2014}

ج- حدد قيم n من $\mathbb{N}$ بحيث $M_n\in\Gamma$ 0,75

تمرين 4 (5 نقط) (5 ن)

الجزء الأول:

نعرف في المجموعة $G=\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$ قانون التركيب الداخلي T بما يلي :

$\forall(x;y)\in G \quad ;\forall(x';y')\in G \quad (x;y)T(x';y')=(xx';\sqrt{x}y'+x'y)$

1) بين أن (G,T) زمرة غير تبادلية 1

2) نعتبر المجموعة $F=\{(1;y)/y\in\mathbb{Z}\}$ ، بين أن (F,T) زمرة جزئية للزمرة (G,T) هل هي تبادلية ؟ علل جوابك . 1

الجزء الثاني :

لتكن المجموعة D بحيث : $D=\left\{M_{(x;y)}=\begin{pmatrix}\sqrt{x} & y\\ 0 & x\end{pmatrix}/(x;y)\in G\right\}$

1) بين أن D جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R});\times)$ 0,50

2) نعتبر التطبيق φ بحيث : $\varphi:G\to D$, $(x;y)\to M(x;y)$

أ- بين أن φ تشاكل تقابلي من (G,T) نحو $(D,\times)$ 0,50

ب- استنتج بنية $(D,\times)$ وحدد مقلوب $M(x;y)$ 0,75

3) نضع $A=M(1;1)$ و $I=M(1;0)$ نعتبر المجموعة $E=\{aI+bA/(a;b)\in\mathbb{Z}^2\}$

أ- تحقق من أن : $A^2=-I+2A$ و استنتج A^{-1} 0,50

ب- بين أن $(E,+;\times)$ حلقة تبادلية و واحدية . هل هي كاملة ؟ علل جوابك 0,75