

الثانية علوم الرياضية	الشعبة:	الامتحان التجريبي 1 2013	أكاديمية البيضاء الكبرى نيابة عين السبع الحي المحمدي
الرياضيات	المادة:		
4 ساعات	مدة الانجاز:		
1	الصفحة:		

التمرين 1 :

لكل $n \in \mathbb{N}^*$ نضع $g_n(x) = 1 + x - e^{-nx}$

I \Leftarrow أعط جدول تغيرات g_n على \mathbb{R}

II \Leftarrow أدرس الفروع اللانهائية لـ g_n

III \Leftarrow أنشئ g_n (لاحظ أن $g_n(0) = 0$)

IV \Leftarrow أثبت أن : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists ! x_n > 0 / g_n(x_n) = 1$

بين أن $(x_n)_n$ تناقصة ومنتجة وأننا متقاربة

V \Leftarrow حسب : $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$

VI \Leftarrow نعتبر المتباينة $(y_n)_{n \geq 1}$ المعرفة كما يلي : $y_1 = 1$ و $y_{n+1} = e^{-y_n}$

1- بين أن x_1 هو الحل الوحيد لـ $e^{-x} = x$ وأن $\frac{1}{e} \leq x_1 \leq 1$

2- بين أن $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{e} \leq y_n \leq 1$

3- بين أن : $\forall n \in \mathbb{N}^*, |y_{n+1} - x_1| \leq e^{-\frac{1}{2}} |y_n - x_1|$

4- استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$

VII \Leftarrow لنكّن F الدالة المعرفة على \mathbb{R}^+ بما يلي : $F(0) = \frac{\ln 2}{2}$ و $\forall x > 0, F(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{g_1(t)} dt$

1- أ- بين أن $\frac{1}{1+t} \leq \frac{1}{g_1(t)} \leq \frac{1}{t}$ $\forall t > 0$

ب- استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$

2- أ- بين أن $\forall t > 0, 1-t \leq e^{-t} \leq 1-t + \frac{t^2}{2}$

ب- أدرس اتصال وقابلية اشتقاق F في 0 على البين

3- بين أن F قابلة للإشتقاق على $]0, +\infty[$ وحسب $F(x)$ $\forall x > 0$

4- أعط جدول تغيرات F وانشئ \mathcal{L}_F

التعريف 2 :

(A) نعتبر المستوى P منسوباً إلى م.م.م $(\vec{r}, \vec{d}, 0)$ ، نقطة كفضاء

f تطبيق من P نحو P' حيث $M(z)$ و $M'(z')$

$$f(M) = M' \iff z' = \frac{3 + i\sqrt{3}}{4}z + \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$$

1- ماهي طبيعة f

0,50

2- حسب AM' بدلالة AM وحدد قياس الزاوية $(\widehat{AM}, \widehat{AM'})$

1

3- بين أن المثلث AMM' قائم الزاوية في M'

0,75

4- لكل n من \mathbb{N}^* نعتبر التطبيقات f_n من P نحو P' حيث

$$f_1 = f \text{ و } f_{n+1} = f \circ f_n \text{ . نضع } M_n = f_n(0) \text{ حيث } z_n \text{ كفضاء } M_n$$

أ- حدد z_n بدلالة n .

1

ب- حدد قيم n من \mathbb{N}^* التي من أجلها M_n ينتمي إلى المحور $(\vec{d}, 0)$

1

(B) 1- حل في \mathbb{C} المعادلات التالية وأكتب حلولها على الشكل الأسّي

$$z^7 = \bar{z} - f$$

1

$$\text{ب- } n \in \mathbb{N}^* \cdot (1 - iz)^n = (1 + iz)^n$$

1

(C) 1- باستعمال الجذور التوئيتية لـ 1 ، بين أن

$$\prod_{k=0}^{n-1} (2 - e^{i \frac{2k\pi}{n}}) = 2^n - 1$$

1

2- استنتج أن : $\prod_{k=0}^{n-1} (5 - 4e^{i \frac{2k\pi}{n}}) = (2^n - 1)^2$

1

التعريف 3 :

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n \geq 2}$ المعرفة بـ : $u_n = \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n! n^n}}$

1,25

احسب $\ln(u_n)$ واستنتج أن :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4e^{-2}$$