

التمرين الثالث (2,75 ن)

- نضع $E = \{x \in \mathbb{N} / x \leq 25\}$.
- 1) نعتبر التطبيق f المعرفة من E نحو E والذي يربط كل عنصر x من E بالعدد $f(x)$ باقي القسمة الأقليدية للعدد $11x + 8$ على 26.
- أ- بين أن f تبادلي.
- ب- بين أن المعادلة: $11x \equiv 1 [26]$ تقبل حلا وحيدا x_0 في E يجب تحديده.
- ج- استنتج أن $(\forall (x, y) \in E^2) : y = f(x) \Rightarrow x \equiv 19y + 4 [26]$.
- 2) نعتبر التطبيق g المعرفة من E نحو E والذي يربط كل عنصر x من E بالعدد $g(x)$ باقي القسمة الأقليدية للعدد x^{13} على 26.
- أ- بين أنه لكل x من E ، لدينا: $x^{13} \equiv x [13]$ و $x^{13} \equiv x [2]$ واستنتج أن g تبادلي.
- ب- بين أن g تقابل من E نحو E وحدد تقابله العكسي g^{-1} .

0.5 ن

0.5 ن

0.5 ن

0.75 ن

0.5 ن

مسألة: (50, 10 ن)

الجزء الأول:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على \mathbb{R} بما يلي:

$$f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} dt$$

ولكن (C_f) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) أ- احسب $f(0)$.

0.25 ن

ب- بين أن $(\forall x \in]0; +\infty[) : \frac{\pi}{4} e^{-2x} \leq f(x) \leq \frac{\pi}{4} e^{-x}$ واستنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

0.5 ن

2) بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ وأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ ثم اعط تايولا هندسيا لتلك.

0.75 ن

3) أ- باستعمال مكاملة بالأجزاء، بين أن: $(\forall u \in \mathbb{R}) : \int_0^u (u-t)e^t dt = e^u - 1 - u$.

0.25 ن

ب- بين أن: $(\forall u \in \mathbb{R}^+) : 0 \leq \int_0^u (u-t)e^t dt \leq \frac{u^2}{2} e^u$.

0.25 ن

ج- استنتج أن: $(\forall u \in \mathbb{R}) : |e^u - 1 - u| \leq \frac{u^2}{2} e^{|u|}$.

0.5 ن

4) ليكن x_0 من \mathbb{R} وليكن h عنصرا من $]-1, 0[\cup]0, 1[$.

أ- تحقق أن: $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + \int_0^1 e^{-x_0(1+t^2)} dt = \int_0^1 e^{-x_0(1+t^2)} \left(\frac{e^{-h(1+t^2)} - 1 + h(1+t^2)}{h(1+t^2)} \right) dt$.

0.25 ن

ب- باستعمال السؤال (ج-3)، بين أن: $\left| \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + \int_0^1 e^{-x_0(1+t^2)} dt \right| \leq |h| e^2 \int_0^1 e^{-x_0(1+t^2)} dt$.

0.5 ن

التمرين الأول: (3,25 ن)

- نعتبر في المستوى العقدي المنسوب إلى M م م $(O; \vec{u}; \vec{v})$ النقط A و B و C الحاقها على التوالي هي: $a=2$ و $b=-i$ و $c=1-i$.
- 1) احسب $\frac{b-a}{c-a}$ ثم بين أن: $(\overline{AC}, \overline{AB}) \equiv \arctan 3 [2\pi]$.
- 2) لكل n من \mathbb{N}^* نعتبر التحويل F_n الذي يحول كل نقطة $M(z)$ الى النقطة $M'(z')$ بحيث: $z' = (1+i)^n z$.
- أ- حدد الشكل الأسي للعدد العقدي $(1+i)^n$ حيث $n \in \mathbb{N}^*$.
- ب- بين أن F_n هو مركب تبادلي لدوران R_n و تحاك H_n لهما نفس المركز O محددنا عناصرهما.
- 3) لتكن $M_n(z_n)$ و لتكن $M'_n(z'_n)$ صورتها بالتحويل F_n .
- أ- حدد مجموعة قيم n من \mathbb{N}^* التي من أجلها تكون النقط O و M_n و M'_n مستقيمية.
- ب- تحقق أن: $\frac{z_1 - z_1}{z_1} = i$ واستنتج طبيعة المثلث $OM_1M'_1$.
- 4) لتكن (C) الدائرة التي مركزها B وشعاعها $\sqrt{2}$.
حدد صورة الدائرة (C) بالتحويل F_1 .

0.75 ن

0.5 ن

0.75 ن

0.5 ن

0.5 ن

0.25 ن

التمرين الثاني (3,25 ن)

- نذكرك أن فضاء متجهي حقيقي وأن $(M_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$ حلقة واحدية.
- لكل a و b و c من \mathbb{R} نضع: $M(a, b, c) = \begin{pmatrix} c & a & b \\ 0 & c & a \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.
- ونعتبر المجموعة التالية: $G = \{M(a, b, c) / (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$.
- 1) بين أن G جزء مستقر من $(M_3(\mathbb{R}), +)$ و $(M_3(\mathbb{R}), \cdot)$.
- 2) أ- بين أن $(G, +, \cdot)$ حلقة واحدية و تبادلية.
ب- هل $(G, +, \cdot)$ جسم؟
- 3) نعرف في \mathbb{R}^3 قانون التركيب الداخلي * التالي:
- $$(a, b, c) * (a', b', c') = (ac' + ca', aa' + bc', cc' + cb')$$
- لكل (a, b, c) و (a', b', c') من \mathbb{R}^3 .
- أ- بين أن (G, \cdot) و $(\mathbb{R}^3, *)$ متشاكلتان تقابليا.
- ب- استنتج أن $(\mathbb{R}^3, +, *)$ حلقة واحدية.

0.5 ن

ان

0.25 ن

0.75 ن

0.75 ن

الصفحة 3

ج- استنتج أن f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} وأن: $(\forall x \in \mathbb{R}) f'(x) = -\int_0^1 e^{-x(1+t^2)} dt$ 0,5 ن

5) أ- أعط جدول تغيرات الدالة f . 0,25 ن

ب- حدد معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة التي أفصولها 0. 0,25 ن

6) انشئ المماس (T) والمنحنى (C_f) . 0,75 ن

الجزء الثاني

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على \mathbb{R} بما يلي: $g(x) = f(x^2)$

1) بين أن الدالة g قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} وأن: $(\forall x \in \mathbb{R}) g'(x) = -2x e^{-x^2} \int_0^1 e^{-(x^2)t^2} dt$ 0,5 ن

2) أ- باستعمال مكاملة بتغيير المتغير، بين أن: $(\forall x \in \mathbb{R}) g'(x) = -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-u^2} du$ 0,5 ن

ب- استنتج أن: $(\forall x \in \mathbb{R}) g(x) + \left(\int_0^x e^{-u^2} du \right)^2 = \frac{\pi}{4}$ 0,5 ن

3) استنتج أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ 0,25 ن

الجزء الثالث:

لتكن $(u_n)_n$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ (\forall n \in \mathbb{N}) u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1) بين أن: $(\forall x \in [0,1]) : f(1) \leq f(x) \leq \frac{\pi}{4}$ 0,25 ن

2) بين أن المعادلة $f(x) = x$ تقبل حلا وحيدا α في \mathbb{R}^+ وأن $0 < \alpha < 1$. 0,75 ن

3) لكل n من \mathbb{N} ، نضع: $v_n = u_{2n}$ و $w_n = u_{2n+1}$ و $h = f \circ f$

أ- بين أن المتتالية $(v_n)_n$ تزايدية وأن $(w_n)_n$ تناقصية.

ب- بين أن h قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} وأن: $(\forall x \in [0,1]) : |h'(x)| \leq e^{-f(x)}$ 0,5 ن

ج- بين أن: $(\forall n \in \mathbb{N}) |v_{n+1} - w_{n+1}| \leq e^{-f(1)} |v_n - w_n|$ 0,5 ن

4) أ- تحقق أن $e^{-f(1)} < 1$ و استنتج أن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - w_n) = 0$ 0,5 ن

ب- استنتج أن المتتاليتين $(v_n)_n$ و $(w_n)_n$ متقاربتان ولهما نفس النهاية α . 0,5 ن

ج- استنتج نهاية المتتالية $(u_n)_n$. 0,25 ن