المملكة المغربية وزارة التربية الوطنية والتعليم العالي وتكوين الأطر والبحث العلمي أكاديمية جهة الدار البيضاء الكبرى نيابة عين السبع الحي المحمدي	الامتحان التجريبي للسنة الثانية من سلك البكالوريا السنةالدراسية 2010/2009 الموضوع	الشعبة	العلوم الرياضية
		المسلك	العلوم الرياضية أ العلوم الرياضية ب
		المادة المعامل	الرياضيات 10
		مدة الانجاز	4ساعات
		الصفحة	1/3

لا يسمح باستخدام الآلة الحاسبة القابلة للبرمجة

التمرين الأول (3.5ن)

نذكر أن $(M_3(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية و $(M_3(\mathbb{R}),+,\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي. نضع :

$$I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad J=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad E=\left\{M(x,y)=\begin{pmatrix}x&y&0\\y&x&0\\0&0&x+y\end{pmatrix}\middle|(x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

1.أ. بين أن $(E,+,\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي — 0.5

ب.اكتب $M(x,y)$ بدلالة I و J و استنتج بعد الفضاء المتجهي E — 0.25

ج.أحسب J^2 و استنتج أن المصفوفة J قابلة للقلب وحدد مقلوبها J^{-1} — 0.5

2.أ.بين أن E جزء مستقر من $(M_3(\mathbb{R}),\times)$ — 0.5

ب.بين أن $(E,+,\times)$ حلقة تبادلية واحدية. — 0.75

ج. أحسب الجداء $M(1,1)\times M(1,-1)$ — 0.25

د. هل $(E,+,\times)$ جسم ؟ — 0.25

3. نضع $A=M(2,-1)$ و $O=M(0,0)$

أ.بين أن $A^2-4A+3I=O$ (O المصفوفة المنعدمة) — 0.25

ب.استنتج أن المصفوفة A قابلة للقلب و اكتب مقلوبها A^{-1} بدلالة I و J — 0.25

التمرين الثاني (3.5ن)

لكل $z\in C^*$ نضع $\varphi(z)=\frac{1}{\bar{z}}$ نعتبر التطبيق :

$$f:P-\{0\}\to P-\{0\}$$
$$M(z)\ \to\ M'(\varphi(z))$$

1. أ. بين أن $(E)\ \varphi(z)+i\bar{z}+(1+2i)=0\Leftrightarrow z^2+(2+i)z+i=0$ — 0.5

ب. حدد حلي المعادلة (E) $(\mathrm{Re}(z_1)>(\mathrm{Re}(z_2)))$ — 0.5

2. أ. بين أن $z_1+1=e^{i\frac{11\pi}{6}}$ و $z_2+1=e^{i\frac{7\pi}{6}}$ 0.5

ب. استنتج الشكل المثلثي لكل من z_1 و z_2 0.5

3. نعتبر المعادلة $(E_n): z^{n-1}\varphi(z)=1$ حيث $n\in N$ و $n\geq 3$

أ. حل في C المعادلة (E_n) 0.5

ب. بين أن مجموع حلول المعادلة (E_n) منعدم وأن صورها تكون مضلعا منتظما محاطا بدائرة يجب تحديدها 0.5

ج. نضع $z=e^{i\alpha}+i$ بحيث $\alpha\in R-\left\{-\frac{\pi}{2}+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$

حدد الشكل المثلثي للعدد $u=z\varphi(z)$ 0.5

التمرين الثالث (3 ن)

نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $(E): 5357x-11688y=487$

1. أ. بين أن العدد 487 أولي 0.25

ب.ليكن الزوج (x,y) حلا للمعادلة (E) ما هي القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين x و y ؟ 0.25

ج. أحسب $PGCD(11688\ ;\ 5357)$ 0.5

2. أ. تحقق أن المعادلة (E) تكافئ المعادلة: $(E'): 11x-24y=1$ 0.25

ب. باستعمال خوارزمية أقليدس حدد حلا خاصا للمعادلة (E') 0.5

ج. حل المعادلة (E) 0.5

3. أ. حدد الأعداد الصحيحة النسبية k بحيث: $24k+11\equiv 0\ [5]$ 0.25

ب. استنتج أنه إدا كان الزوج (x,y)حلا للمعادلة (E) بحيث 5 يقسم x فإن 5 يقسم $y-1$. 0.5

مسألة (10 ن)

نعتبر المستوى P المنسوب للمعلم الممنظم المتعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$

الجزء الأول

نعتبر الدالة g المعرفة على $[1;+\infty[$ بما يلي $g(x)=x\ln(x)-x+1$

1. أ. أدرس تغيرات الدالة g 0.75

ب. استنتج إشارة $g(x)$ لكل $x\in[1;+\infty[$ 0.75

2. لتكن f الدالة المعرفة على $[1;+\infty[$ بما يلي : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x-1}{\ln(x)} & x>1 \\ f(1)=1 \end{cases}$ 0.5

بين أن f دالة متصلة في 1

3. أ. بين أن لكل $t\in[1;+\infty[$ لدينا : $t-1-(t-1)^2\leq 1-\frac{1}{t}\leq t-1$ 0.5

ب. استنتج أن : $\forall x\geq 1: \dfrac{(x-1)^2}{2}-\dfrac{(x-1)^3}{3}\leq x-1-\ln(x)\leq\dfrac{(x-1)^2}{2}$ 0.75

ج. احسب $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-1-\ln(x)}{(x-1)^2}$ 0.5

د. استنتج أن f قابلة للإشتقاق في 1 وأن $f'(1)=\frac{1}{2}$ 0.5

4. اعط جدول تغيرات الدالة f 0.5

الجزء الثاني

نعتبر الدالة المعرفة على $[1,+\infty[$ بما يلي : $\begin{cases} F(x)=\int_x^{x^2}\frac{1}{\ln(t)}dt : x>1 \\ F(1)=\ln(2) \end{cases}$

1. أ. بين أن $\forall x>1 : \frac{x^2-x}{\ln(x^2)} \le F(x) \le \frac{x^2-x}{\ln(x)}$ 0.75

ب. إستنتج $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}$ 0.5

2. أ. بين أنه لكل x من $]1,+\infty[$ و لكل t من $\left[x;x^2\right]$ لدينا 0.5

$$\frac{x}{t\ln(t)} \le \frac{1}{\ln(t)} \le \frac{x^2}{t\ln(t)}$$ 0.75

ب. استنتج أنه لكل x من $]1;+\infty[$ لدينا : $x\ln(2) \le F(x) \le x^2\ln(2)$ 0.5

ج. بين أن f متصلة في 1 0.5

3. أ. بين أن F قابلة للاشتقاق على $]1,+\infty[$ وأن $\forall x>1 : F'(x)=f(x)$ 0.75

ب. ليكن x من $]1,+\infty[$ بين أنه يوجد c من $]1,x[$ بحيث $F(x)-F(1)=(x-1)F'(c)$ 0.5

ج. استنتج أن F قابلة للاشتقاق على يمين 1 وأن $F'(1)=1$ 0.5

4. اعط جدول تغيرات F وأنشئ منحنى F 0.5