



$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\sin^2 x}}{\sin x} = \lim_0 \frac{|\sin x|}{\sin x}$$

$$\lim_{0^+} f(x) = \lim_{0^+} \frac{\sin x}{\sin x} = 1$$

$$\lim_{0^-} f(x) = \lim_{0^-} \frac{-\sin x}{\sin x} = -1$$

$$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 2 \tan x$$

تمرين 3: نعتبر الدالة f :

هل f تقبل تمديدا بالاتصال في $\frac{\pi}{4}$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} - 2 \tan x$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} - 2 \frac{\sin x}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - 2 \sin x \cos x}{\cos^2 x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin(2x)}{\cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{1 - \sin 2x}{\cos 2x}$$

$$(1) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} = 2 \text{ لدينا}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin 2x}{\cos(2x)} \quad \text{لنحسب:}$$

$$x = t + \frac{\pi}{4} \quad \text{يعني} \quad t = x - \frac{\pi}{4}$$

$$x \rightarrow \frac{\pi}{4} \Rightarrow t \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin(2x)}{\cos(2x)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \sin\left(2t + \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(2t + \frac{\pi}{2}\right)} \quad \text{إذن:}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2t}{-\sin 2t}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2t}{(2t)^2} \cdot \frac{-1}{\frac{\sin 2t}{2t} \cdot 2t}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2t}{(2t)^2} \cdot \frac{-1}{\frac{\sin 2t}{2t} \cdot 2t} = \frac{1}{2} \times -1 \times 0 = 0 \quad (2)$$

من (1) و (2) لدينا: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} f(x) = 0$

(I) تذكير:

تمرين 1: احسب:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + (x-1)\sqrt{1-x}}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + (x-1)\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right)}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \times \frac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{x - \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} - \left(x^2 - x^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right) \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}} \right) (x - \sqrt{x^2 + 1})$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} - x^2 \left(1 - \left(1 - \frac{1}{x}\right) \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}}\right) (x - \sqrt{x^2 + 1})$$

$$= +\infty$$

تمرين 2: نعتبر الدالة f المعرفة كما يلي:

$$\text{ادرس اتصال } f \text{ في } 0. \quad \begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\sin x}; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\sin x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{(1 - \cos x)}{x^2}} \cdot (1 + \cos x) \cdot x^2 \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \frac{1}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} |x| \sqrt{\frac{1 - \cos x}{x^2}} \cdot (1 + \cos x) \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{x^2}} \cdot (1 + \cos x) \cdot \frac{1}{\sin x} = 1$$

لدينا $\lim_{0^+} f(x) = f(0)$ إذن f متصلة على يمين 0.

$$\lim_{0^-} f(x) = -\sqrt{\frac{1 - \cos x}{x^2}} \cdot (1 + \cos x) \cdot \frac{1}{\sin x} = -1$$

لدينا $\lim_{0^-} f(x) \neq f(0)$ إذن f غير متصلة على يسار 0.

وبالتالي f غير متصلة في 0.

طريقة أخرى:

بالنسبة لـ $\varepsilon > 0$ يوجد $\alpha_1 > 0$ بحيث
 $|x - f(x_0)| < \alpha_1 \Rightarrow |g(x) - g(f(x_0))| < \varepsilon$ (I)
 ولدنيا f متصلة في x_0 إذن بالنسبة α_1 يوجد $\alpha_2 > 0$ بحيث:
 $|x - x_0| < \alpha_2 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \alpha_1$ (II)
 نأخذ $\alpha = \alpha_2$

$|x - x_0| < \alpha \Rightarrow |x - x_0| < \alpha_2$
 لدينا: (II) $\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \alpha_1$
 (I) $\Rightarrow |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon$

إذن:
 $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0): |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |g \circ f(x) - g \circ f(x_0)| < \varepsilon$
 إذن $g \circ f$ متصلة في x_0 بالتالي $g \circ f$ متصلة على I .

خاصية:

لتكن f دالة متصلة على مجال I و g دالة متصلة على مجال J
 بحيث $f(I) \subset J$ الدالة $g \circ f$ متصلة على I

ملاحظة: إذا كانت f متصلة في x_0 و g متصلة في $f(x_0)$
 فإن $g \circ f$ متصلة في x_0 .

مثال: $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$

نضع $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$ و $h(x) = \cos x$
 لدينا $f = g \circ h$

لدينا g متصلة على \mathbb{R} و h متصلة على \mathbb{R} و $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}$
 إذن $f = h \circ g$ متصلة على \mathbb{R} .

(2) مركب دالة متصلة ودالة تقبل نهاية:

خاصية:

لتكن f دالة معرفة على مجال I منقط مركزه x_0 و g دالة
 معرفة على J بحيث $f(I) \subset J$.
 إذا كانت f نهاية l في x_0 و g متصلة في l فإن
 $\lim_{x \rightarrow x_0} g \circ f(x) = g(l)$

مثال: نعتبر $f(x) = \cos\left(\frac{x}{\sqrt{1+x}-1}\right)$ لنحسب: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

لدينا: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+x}-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1+x} + 1 = 2$

ولدينا: $x \rightarrow \cos x$ متصلة في 2

إذن: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \cos(2)$

ملاحظة: عمليا لحساب هذه النهاية نتبع ما يلي:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{x}{\sqrt{1+x}-1}\right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \cos(\sqrt{1+x} + 1) = \cos(2)$$

إذن f تقبل تمديدا g بالاتصال في 0 معرف بما يلي:

$$\begin{cases} g(x) = f(x); x \neq 0 \\ g\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \end{cases}$$

تمرين 4:

نعتبر الدالة f :
 $\begin{cases} f(x) = x \sin\left(\frac{2}{x}\right), x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

(1) ادرس اتصال f في 0.

(2) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(1) الاتصال في 0:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{2}{x}\right)$$

لدينا: $\forall x \neq 0 -1 \leq \sin\left(\frac{2}{x}\right) \leq 1$

إذا كان $x > 0$

لدينا $-x \leq x \sin\left(\frac{2}{x}\right) \leq x$ يعني $-x \leq f(x) \leq x$

ولدينا $\lim_{0^+} x = \lim_{0^+} -x = 0$

إذن $\lim_{0^+} f(x) = 0$

إذا كان $x < 0$

لدينا $x \leq x \sin\left(\frac{2}{x}\right) \leq -x$ يعني $x \leq f(x) \leq -x$

ولدينا $\lim_{0^-} x = \lim_{0^-} -x = 0$

إذن $\lim_{0^-} f(x) = 0$

لدينا $\lim_{0^-} f(x) = \lim_{0^+} f(x) = f(0) = 0$

إذن f متصلة في 0.

(2) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin\left(\frac{2}{x}\right)$$

نضع $t = \frac{2}{x}$ $x \rightarrow +\infty \Rightarrow t \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin\left(\frac{2}{x}\right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2}{t} \sin t = \lim_{t \rightarrow 0} 2 \frac{\sin t}{t} = 2$$

(II) مركب دالتين:

(1) اتصال مركب دالتين:

لتكن f دالة متصلة على مجال I مفتوح و g متصلة على J
 بحيث $f(I) \subset J$.

لنبين أن $g \circ f$ متصلة على I .

ليكن $x_0 \in I$. لنبين أن $g \circ f$ متصلة في x_0

ليكن $\varepsilon > 0$ لنبحث عن $\alpha > 0$ بحيث:

$$|x - x_0| < \alpha \Rightarrow |g \circ f(x) - g \circ f(x_0)| < \varepsilon$$

لدينا g متصلة في $f(x_0)$ إذن:

خاصية (2):

لتكن f متصلة على $[a, b]$
إذا كانت f رتيبة قطعاً على $[a, b]$ و $f(a)f(b) < 0$ فإنه يوجد
عدد وحيد $c \in]a, b[$ بحيث $f(c) = 0$.

برهان:

من خلال خاصية (1) نستنتج أنه يوجد $c \in]a, b[$ بحيث $f(c) = 0$
لنبين أن c وحيد.
نفترض أنه يوجد c_1, c_2 مختلفان بحيث $f(c_1) = f(c_2) = 0$
لدينا $c_1 \neq c_2$ يعني $c_1 < c_2$ أو $c_2 < c_1$.
وبما أن f رتيبة قطعاً (تزايدية مثلاً).
فإن: $f(c_1) < f(c_2)$ أو يعني $0 < 0$ وهذا تناقض.
 $f(c_1) > f(c_2)$ أو يعني $0 > 0$
إذن العدد c وحيد.

تمارين تطبيقية:

تمرين (1): بين أن المعادلة $x^3 + x^2 + x - \sqrt{2} = 0$

تقبل على الأقل حلاً في \mathbb{R} .

نضع $f(x) = x^3 + x^2 + x - \sqrt{2}$ ونعتبر المجال $[0, 1]$

لدينا f متصلة على $[0, 1]$

لدينا $f(0) = -\sqrt{2}$ و $f(1) = 3 - \sqrt{2}$

إذن $f(0) \cdot f(1) < 0$

إذن حسب (م.ق.و) المعادلة $f(x) = 0$ تقبل على الأقل حلاً
في $]0, 1[$.

وبالتالي المعادلة $x^3 + x^2 + x - \sqrt{2} = 0$ تقبل حلاً على الأقل في \mathbb{R} .

تمرين 2: بين أن المعادلة $x^5 + x^3 + 3x - 4 = 0$ تقبل حلاً وحيداً
في \mathbb{R} .

نضع $f(x) = x^5 + x^3 + 3x - 4$ ونعتبر المجال $[0, 1]$

* لدينا f متصلة على $[0, 1]$ لأنها دالة حدودية.

ولدينا $f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 3 > 0$ بما أن $f'(x) > 0$ فإن f تزايدية قطعاً
على \mathbb{R} وبالتالي على $[0, 1]$

$f(0) = -4 < 0$ و $f(1) = 1 > 0$ إذن $f(0) \cdot f(1) < 0$

وحسب (م.ق.و) المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً في $]0, 1[$.

* لنبين أن المعادلة ليست لها حل في المجالين: $]1, +\infty[$ و $]-\infty, 0[$

ليكن $\alpha \in]1, +\infty[$ لدينا $\alpha > 1$

يعني $f(\alpha) > f(1)$

أي $f(\alpha) > 1$

ومنه $f(\alpha) \neq 0$. إذن α ليست حلاً للمعادلة $f(x) = 0$ ومنه

المعادلة $f(x) = 0$ لا تقبل حلاً في $]1, +\infty[$

وبنفس الطريقة نبين أنها لا تقبل حلاً في $]-\infty, 0[$

وبالتالي $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً في \mathbb{R} .

تمرين 3: لتكن f دالة متصلة على $[a, b]$ بحيث

$$f([a, b]) \subset [a, b]$$

بين أن f تقبل نقطة صامدة في $[a, b]$ يعني يوجد c من $[a, b]$

$$f(c) = c$$

(III) صورة مجال بدالة متصلة:

(1) أمثلة

مثال 1: نعتبر $f(x) = x^2$

لدينا f متصلة على \mathbb{R}

ولدينا

$$f([-1, 1]) = [-1, 1] \quad f([0, 1]) = [0, 1]$$

$$f(]-1, 1[) = [0, 1[\quad f(]0, 1[) =]0, 1[$$

$$f([-1, 1[) = [0, 1[\quad f([0, 1]) = [0, 1[\quad f(\mathbb{R}) = [0, +\infty[$$

مثال 2: نعتبر الدالة $f(x) = E(x)$

لدينا f غير متصلة على $[0, 1]$ لأنها غير متصلة على يسار 1 لأن:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} E(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 0 = 0 \neq f(1) = 1$$

إذن f غير متصلة على يسار 1.

ولدينا $f([0; 1]) = \{0, 1\}$.

(2) خاصيات:

خاصية مقبولة:

1- صورة مجال بدالة متصلة هي مجال.

2- صورة قطعة بدالة متصلة هي قطعة.

(3) مبرهنة القيم الوسيطة.

لتكن f دالة متصلة على $[a, b]$.

نعلم أن صورة قطعة بدالة متصلة هي قطعة بدالة متصلة

إذن $f([a; b]) = [m, M]$

* لكل $y \in [m, M]$ يوجد $x \in [a, b]$ بحيث $f(x) = y$

* ليكن λ عدد محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ لدينا $f(a) < \lambda < f(b)$

ينتميان إلى $[m, M]$ إذن $\lambda \in [m, M]$ إذن يوجد c من $[a, b]$

بحيث $f(c) = \lambda$

خاصية: (م.ق.و).

لتكن f دالة متصلة على $[a, b]$

إذا كان λ عدد محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ فإنه

يوجد $c \in [a, b]$ بحيث $f(c) = \lambda$.

ملاحظة:

لتكن f متصلة على $[a, b]$ بحيث $f([a, b]) = [m, M]$ لكل y

من $[m, M]$ يوجد على الأقل x من $[a, b]$ بحيث $f(x) = y$.

حالات خاصة:

خاصية (1):

لتكن f دالة متصلة على $[a, b]$.

إذا كان $f(a) \cdot f(b) < 0$ (يعني $f(a) < f(b)$ لهما إشارتان

مختلفتان) فإنه يوجد $c \in]a, b[$ بحيث $f(c) = 0$.

يعني المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً على الأقل في $]a, b[$.

ملاحظة:

إذا كان $f(a) \cdot f(b) \leq 0$ فإن $c \in [a, b]$

$$g(x) = f(x) - x$$

لدينا g متصلة على $[a, b]$ لأن f متصلة و $x \rightarrow x$ متصلة.

$$f(a) \in [a, b] \text{ ولدينا } g(a) = f(a) - a$$

$$\text{إذن } f(a) \geq a \text{ أي } f(a) - a \geq 0 \text{ أي } g(a) \geq 0$$

$$\text{ولدينا } g(b) = f(b) - b$$

$$\text{إذن } f(b) \leq b \text{ أي } f(b) - b \leq 0 \text{ أي } g(b) \leq 0$$

$$\text{ومنه } g(a) \cdot g(b) \leq 0$$

وحسب (م.ق.و) يوجد c من $[a, b]$ بحيث $g(c) = 0$

$$\text{يعني } f(c) - c = 0$$

$$\text{يعني } f(c) = c$$

وبالتالي f تقبل نقطة صامدة في $[a, b]$.

(IV) الدالة العكسية لدالة متصلة ورتبية قطعاً.

(1) الوجود: Existence

لتكن f دالة متصلة ورتبية قطعاً على مجال I

نعلم أن $f(I)$ مجال. نضع $J = f(I)$.

* لنبين أن f تقابل من I نحو J .

لدينا $f(I) = J$ إذن f شمولي.

لنبين أن f تبايني:

لدينا f رتبية قطعاً. نفترض مثلاً أن f تزايدية قطعاً.

ليكن $x \neq x'$ من I بحيث $x < x'$

$$x < x' \Rightarrow x < x' \text{ أو } x > x'$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) < f(x') \\ f(x) > f(x') \end{cases} \text{ لدينا}$$

$$\Rightarrow f(x) \neq f(x')$$

$$\text{إذن: } (\forall (x, x') \in I^2) x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$$

ومنه f تبايني.

وبالتالي f تقابل من I نحو J .

خاصية:

إذا كانت:

$$\left\{ \begin{array}{l} * f \text{ متصلة على مجال } I \\ * f \text{ رتبية قطعاً على } I \\ * f(I) = J \end{array} \right. \text{ فإن } f \text{ تقابل من } I \text{ نحو } J$$

وبالتالي f تقبل دالة عكسية $f^{-1}: J \rightarrow I$ ولدينا:

$$(\forall x \in J) (\forall y \in I): f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$$

ملاحظة:

1- إذا كانت f دالة تزايدية و متصلة فإن:

$$f([a, b]) = [f(a), f(b)]$$

$$f([a, b[) = [f(a), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)[$$

$$f([a, b]) = [f(a), \lim_{x \rightarrow b^+} f(x)[$$

2- إذا كانت f دالة متصلة و تناقصية فإن:

$$f([a, b]) = [f(b), f(a)]$$

$$f([a, b[) =]\lim_{x \rightarrow b^-} f(x), f(a)[$$

$$f([a, +\infty[) =]\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); f(a)[$$

تمارين تطبيقية:

تمرين 1: بين أن المعادلة $x^5 + x^3 + 3x - 4 = 0$ تقبل حلاً وحيداً في \mathbb{R}

في \mathbb{R}

$$\text{نضع } f(x) = x^5 + x^3 + 3x - 4$$

لدينا f متصلة على \mathbb{R}

$$(\forall x \in \mathbb{R}): f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 3 > 0$$

إذن f متصلة على \mathbb{R} :

$$\text{ولدينا: } f(\mathbb{R}) =]\lim_{x \rightarrow -\infty} f; \lim_{x \rightarrow +\infty} f[$$

$$=]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}$$

إذن f تقابل من \mathbb{R} نحو \mathbb{R} .

ولدينا $0 \in \mathbb{R}$ إذن 0 يقبل سابقاً وحيداً في \mathbb{R} .

ومنه المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً في \mathbb{R}

تمرين 2: نعتبر الدالة $f: [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow 2x$$

1- بين أن f تقابل (دالة عكسية) من $[0, 4]$ نحو مجال يجب تحديده.

2- حدد f^{-1}

3- أنشئ C_f و $C_{f^{-1}}$ في نفس المعلم.

* لدينا f متصلة على $[0, 4]$

$$(\forall x \in [0, 4]): f'(x) = 2 > 0$$

إذن f تزايدية قطعاً على $[0, 4]$

$$* \text{ لدينا: } f([0, 4]) = [f(0), f(4)]$$

$$= [0, 8]$$

إذن تقابل من $[0, 4]$ نحو $[0, 8]$.

وبالتالي تقبل f^{-1} من $[0, 8]$ إلى $[0, 4]$.

* لنحدد $f^{-1}(x)$

$$(\forall x \in [0, 8]) (\forall y \in [0, 4])$$

$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$$

$$\Leftrightarrow 2y = x$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{x}{2}$$

$$\text{إذن } f^{-1}(x) = \frac{x}{2}$$

ملاحظة:

نلاحظ أن f^{-1} متصلة ولها نفس رتابة f ومنحناها هو مائل

منحنى f بالنسبة للنصف الأول.

(2) خاصيات الدالة العكسية:

(a) الاتصال:

خاصية: (مقبولة)

لتكن f متصلة ورتبية قطعاً على مجال I

$$\text{الدالة } f^{-1} \text{ متصلة على } J$$

(b) الرتابة:

خاصية:

لتكن f دالة متصلة ورتبية قطعاً على مجال I

$$\text{الدالة } f^{-1} \text{ رتبية قطعاً ولها نفس رتابة } f \text{ على } J$$

إذن g تقابل من $\left[-\frac{1}{4}, +\infty\right]$ نحو $\left[\frac{-9}{8}, +\infty\right]$
 إذن g تقبل دالة عكسية: $g^{-1}: \left[\frac{-9}{8}, +\infty\right] \rightarrow \left[-\frac{1}{4}, +\infty\right]$
 (b) تحديد $g^{-1}(x)$:

$$\left(\forall x \in \left[\frac{-9}{8}, +\infty\right]\right) \left(\forall y \in \left[-\frac{1}{4}, +\infty\right]\right)$$

$$g^{-1}(x) = y \quad \text{لدينا:}$$

$$\Leftrightarrow g(y) = x$$

$$\Leftrightarrow 2y^2 + y - 1 = x$$

$$\Leftrightarrow 2y^2 + y = x + 1$$

$$\Leftrightarrow y^2 + \frac{1}{2}y = \frac{x+1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(y + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} = \frac{1}{2} + \frac{x}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(y + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{9+8x}{16}$$

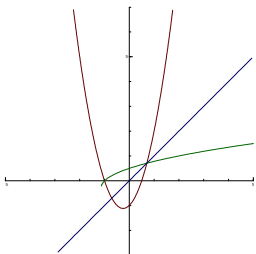
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y + \frac{1}{4} = \sqrt{\frac{9+8x}{16}} \\ y + \frac{1}{4} = \sqrt{9+8x} \end{cases}$$

ولدينا $y \geq \frac{-1}{4}$ يعني $y + \frac{1}{4} \geq 0$

$$\text{إذن } y + \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{9+8x}}{4}$$

$$\text{يعني } y = \frac{\sqrt{9+8x}-1}{4}$$

$$\text{إذن: } g^{-1}(x) = \frac{\sqrt{9+8x}-1}{4} \quad (3)$$



(V) تطبيقات:

(1) الدوال العكسية للدوال المثلثية:

(a) دالة قوس الجيب Arc sinus

$$f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow \sin x$$

$$\text{لدينا } f \text{ متصلة على } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$f'(x) = \cos x$$

لدينا $f'(x) > 0$ على $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ما عدا في $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ حيث نتقدم

إذن f تزايدية قطعاً على $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

$$f\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) = \left[f\left(-\frac{\pi}{2}\right); f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = [-1, 1]$$

برهان: $f: I \rightarrow J \quad f^{-1}: J \rightarrow I$

ليكن $y_2 \neq y_1$ من J بحيث

$$\frac{f^{-1}(y_2) - f^{-1}(y_1)}{y_2 - y_1}$$

نضع $f(x_2) = y_2$ و $f(x_1) = y_1$ يعني $x_2 = f^{-1}(y_2)$ و $x_1 = f^{-1}(y_1)$ مع $x_2, x_1 \in I$

$$\frac{f^{-1}(y_2) - f^{-1}(y_1)}{y_2 - y_1} = \frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)}$$

$$= \frac{1}{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}}$$

إذن $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ و $\frac{f^{-1}(y_2) - f^{-1}(y_1)}{y_2 - y_1}$ لهما نفس الإشارة وبالتالي f و f^{-1} لهما نفس الرتبة.

(c) المنحنى:

خاصية:

لتكن f متصلة ورتيبة قطعاً على مجال I
 $C_{f^{-1}} \cap C_f$ متماثلان بالنسبة للمنصف الأول.

برهان: لدينا $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in C_f \Leftrightarrow f(x) = y$

$$\Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$$

$$\Leftrightarrow M' \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \in C_{f^{-1}}$$

وبما أن M' هي ممائلة بالنسبة للمنصف الأول فإن $C_{f^{-1}}$ هو مماثل C_f بالنسبة للمنصف الأول.

تمرين تطبيقي:

نعتبر الدالة $f(x) = 2x^2 + x - 1$

(1) ادرس تغيرات f وأنشئ C_f

(2) ليكن g قصور f على $I = \left[-\frac{1}{4}, +\infty\right]$

(a) بين أن g تقابل من I نحو مجال يجب تحديده.

(b) حدد $g^{-1}(x)$

(c) أنشئ $C_{g^{-1}}$

-1 تغيرات f :

$$\text{لدينا: } f'(x) = 4x + 1$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{4}$	$+\infty$
f'	-	0	+
f	$+\infty$	$-\frac{9}{8}$	$+\infty$

(2) (a) لدينا g متصلة لأنها قصور دالة متصلة.

ومن خلال جدول تغيرات f لدينا g تزايدية قطعاً على I

$$g\left(\left[-\frac{1}{4}, +\infty\right]\right) = \left[\frac{-9}{8}, +\infty\right]$$

$$\left(\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \right) : \sin x = \sin y \Leftrightarrow x = y \quad (9)$$

$$\sin x < \sin y \Leftrightarrow x < y$$

(10) الدالة Arcsin فردية.

برهان:

لنبين أن Arcsin فردية:

لكل x من $[-1, 1]$ لدينا $-x \in [-1, 1]$

لنبين أن $\text{Arcsin}(-x) = -\text{Arcsin} x$ ($\forall x \in [-1, 1]$)

طريقة 1:

$$\sin(\text{Arcsin}(-x)) = -x \quad \text{لدينا:}$$

$$\sin(-\text{Arcsin}(x)) = -\sin(\text{Arcsin}(x))$$

$$= -x$$

إذن (1) $\sin(\text{Arcsin}(-x)) = \sin(-\text{Arcsin}(x))$

$$(2) -\frac{\pi}{2} \leq \text{Arcsin}(-x) \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\text{و} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \text{Arcsin}(x) \leq \frac{\pi}{2}$$

$$(3) -\frac{\pi}{2} \leq -\text{Arcsin}(x) \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{يعني}$$

من (1) و (2) و (3) نستنتج أن $\text{Arcsin}(-x) = -\text{Arcsin} x$ وبالتالي الدالة Arcsin فردية.

طريقة 2:

لنبين أن $\text{Arcsin}(-x) = -\text{Arcsin} x$

نستعمل التكافؤات المتتالية:

$$\text{لدينا:} \quad \text{Arcsin}(-x) = -\text{Arcsin} x$$

$$\Leftrightarrow \sin(\text{Arcsin}(-x)) = \sin(-\text{Arcsin} x)$$

$$\text{لأن} \quad \text{Arcsin}(-x) \text{ و } \text{Arcsin} x \text{ من } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$$

$$\Leftrightarrow -x = -\sin(\text{Arcsin} x)$$

$$\Leftrightarrow -x = -x$$

بما أن العبارة الأخيرة صحيحة فإن $\text{Arcsin}(-x) = -\text{Arcsin}(x)$

طريقة 3:

لنبين أن $\text{Arcsin}(-x) = -\text{Arcsin}(x)$

$$\text{نضع} \quad \text{Arcsin}(-x) = y \quad \text{مع} \quad y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$$

لدينا:

$$\left(y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \right) \text{Arcsin}(-x) = y \Leftrightarrow \sin y = -x$$

$$\Leftrightarrow -\sin y = x$$

$$\Leftrightarrow \sin(-y) = x$$

$$\Leftrightarrow \text{Arcsin}(\sin(-y)) = \text{Arcsin} x$$

$$\left(-y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \right) \Leftrightarrow -y = \text{Arcsin} x$$

$$\Leftrightarrow y = -\text{Arcsin} x$$

$$\Leftrightarrow \text{Arcsin}(-x) = -\text{Arcsin} x$$

طريقة 4:

لنبين أن: $\text{Arcsin}(-x) = -\text{Arcsin} x$

ملاحظة: لكي نبين أن $\text{Arcsin} \alpha = \beta$ يكفي أن نبين أن

إذن f تقابل من $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$ نحو $[-1, 1]$ وبالتالي تقبل دالة عكسية

$$. f^{-1} : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$$

الدالة f^{-1} تسمى دالة قوس الجيب. نرمز لها Arcsin .

تعريف:

نسمي دالة قوس الجيب الدالة العكسية للدالة

$$f : \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right] \rightarrow [-1, 1]$$

$$. \text{Arcsin} \text{ ونرمز لها ب } x \rightarrow \sin x$$

ملاحظة:

$$f^{-1} = \text{Arcsin} : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \quad f : \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right] \rightarrow [-1, 1]$$

$$x \rightarrow \text{Arcsin} x$$

$$x \rightarrow \sin x$$

$$\left(\forall x \in [-1, 1] \right) \left(\forall y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \right) : f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$$

$$\text{Arcsin} x = y \Leftrightarrow \sin y = x$$

(* هذا يعني أن لكل x من $[-1, 1]$ العدد $\text{Arcsin} x$ هو العدد y

من $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ الذي يحقق $\sin y = x$

$$\begin{cases} \sin y = x \Rightarrow \text{Arcsin} x = y \\ y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \end{cases} \quad \begin{cases} \text{Arcsin} x = y \Rightarrow \sin y = x \\ x \in [-1, 1] \end{cases} \quad (*)$$

أمثلة:

$$\left(0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \text{ و } \sin 0 = 0 \right) \quad \sin 0 = 0$$

$$\text{Arcsin} 1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Arcsin} -\frac{1}{2} = -\frac{\pi}{6}; \text{Arcsin} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{Arcsin} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Arcsin} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$$

خاصيات:

(1) الدالة Arcsin تقابل من $[-1, 1]$ نحو $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$

(2) الدالة Arcsin متصلة على $[-1, 1]$

(3) الدالة Arcsin تزايدية قطعاً على $[-1, 1]$

$$D_{\text{Arcsin}} = [-1, 1] \quad (4)$$

$$\left(\forall x \in [-1, 1] \right) : -\frac{\pi}{2} \leq \text{Arcsin} x \leq \frac{\pi}{2} \quad (5)$$

$$\left(\forall x \in [-1, 1] \right) : \sin(\text{Arcsin} x) = x \quad (6)$$

$$\left(\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \right) : \text{Arcsin}(\sin x) = x \quad (7)$$

$$\left(\forall x \in [-1, 1] \right) : \text{Arcsin} x = \text{Arcsin} y \Leftrightarrow x = y \quad (8)$$

$$\text{Arcsin} x < \text{Arcsin} y \Leftrightarrow x < y$$

لكل x من $[-1,1]$ العدد $\text{Arc cos } x$ هو العدد y من $[0, \pi]$ الذي يحقق $\cos y = x$.

$$\begin{aligned} \text{Arc cos } x = y &\Rightarrow \cos y = x \quad * \\ \left\{ \begin{array}{l} \cos y = x \Rightarrow \text{Arc cos } x = y \quad * \\ y \in [0, \pi] \end{array} \right. \end{aligned}$$

أمثلة:

$$\begin{aligned} \text{Arc cos } 1 &= 0 & \text{Arc cos } 0 &= \frac{\pi}{2} \\ \text{Arc cos } \frac{\sqrt{3}}{2} &= \frac{\pi}{6} & \text{Arc cos } \frac{1}{2} &= \frac{\pi}{3} \\ \text{Arc cos } -1 &= \pi & \text{Arc cos } \frac{\sqrt{2}}{2} &= \frac{\pi}{4} \\ \text{Arc cos } -\frac{\sqrt{3}}{2} &= \frac{5\pi}{6} & \text{Arc cos } -\frac{1}{2} &= \frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

خاصيات:

1- الدالة Arc cos تقابل من $[-1,1]$ نحو $[0, \pi]$

2- الدالة Arc cos متصلة على $[-1,1]$

3- الدالة Arc cos تناقصية قطعاً على $[-1,1]$

$$D_{\text{Arc cos}} = [-1,1] \quad -4$$

$$(\forall x \in [-1,1]) 0 \leq \text{Arc cos } x \leq \pi \quad -5$$

$$(\forall x \in [-1,1]) \cos(\text{Arc cos } x) = x \quad -6$$

$$(\forall x \in [0, \pi]) \text{Arc cos}(\cos x) = x \quad -7$$

$$(\forall x, y \in [-1,1]) \text{Arc cos } x = \text{Arc cos } y \Leftrightarrow x = y \quad -8$$

$$\text{Arc cos } x (\text{Arc cos } y \Leftrightarrow x) y$$

$$(\forall x, y \in [0, \pi]) \cos x = \cos y \Leftrightarrow x = y \quad -9$$

$$\cos x (\cos y \Leftrightarrow x) y$$

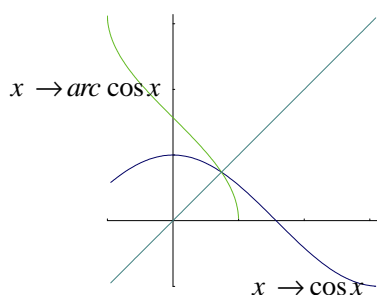
10- الدالة Arc cos ليست لا زوجية ولا فردية.

ملاحظة: لكي نبين أن $a = b$ يكفي أن نبين أن $\cos a = \cos b$ و b و a ينتميان ل $[0, \pi]$.

مثال:

$$\begin{aligned} \text{احسب } \text{Arc cos} \left(\cos \frac{11}{3} \pi \right) \\ \text{Arc cos} \left(\cos \frac{11}{3} \pi \right) &= \text{Arc cos} \left(\cos \left(4\pi - \frac{\pi}{3} \right) \right) \\ &= \text{Arc cos} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right) \\ &= \text{Arc cos} \left(\cos \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\pi}{3} \left(\frac{\pi}{3} \in [0, \pi] \right) \end{aligned}$$

التمثيل المبياني للدالة Arc cos



$$-\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{و} \quad \sin \beta = \alpha$$

لدينا: $\sin(-\text{Arc sin } x) = -\sin(\text{Arc sin } x)$

$$(1) \sin(-\text{Arc sin } x) = -x$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq -\text{Arc sin } x \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{ولدينا}$$

من (1) و (2) نستنتج أن $\text{Arc sin}(-x) = -\text{Arc sin } x$

تمرين تطبيقي: أحسب ما يلي:

$$\text{Arc sin} \left(\sin \frac{2\pi}{3} \right) \quad (1)$$

$$\text{Arc sin} \left(\sin \frac{107\pi}{3} \right) \quad (2)$$

$$\text{Arc sin} \left(\sin \frac{2\pi}{3} \right) = \text{Arc sin} \left(\sin \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) \right) = -1$$

$$= \text{Arc sin} \left(\sin \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\pi}{3}$$

$$\left(\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \right) \quad \text{لأن}$$

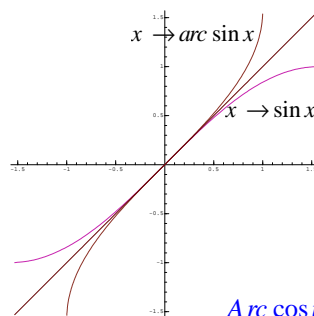
$$\text{Arc sin} \left(\sin \frac{107\pi}{3} \right) = \text{Arc sin} \left(\sin \left(35\pi + \frac{2\pi}{3} \right) \right) = -2$$

$$= \text{Arc sin} \left(\sin \left(35\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \right) \right)$$

$$= \text{Arc sin} \left(\sin -\frac{\pi}{3} \right) = -\frac{\pi}{3}$$

$$\left(-\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \right) \quad \text{لأن}$$

التمثيل المبياني للدالة Arc sin



(b) الدالة قوس جيب التمام Arc cosinus

نعتبر الدالة: $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow \cos x$$

لدينا f متصلة على $[0, \pi]$

$$f'(x) = -\sin x$$

لدينا $f'(x) < 0$ على $[0, \pi]$ ما عدا في 0 و π حيث تنعدم، إذن f تناقصية قطعاً على $[0, \pi]$.

$$f([0, \pi]) = [f(\pi), f(0)] = [-1, 1]$$

إذن f تقابل من $[0, \pi]$ نحو $[-1, 1]$ وبالتالي تقبل دالة عكسية:

$$f^{-1}: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

f^{-1} تسمى دالة قوس جيب التمام. نرسم لها ب Arc cos .

تعريف:

نسمي دالة قوس جيب التمام الدالة العكسية للدالة:

$$\text{Arc cos } f: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$$

$$x \rightarrow \cos x$$

ملاحظة: $f^{-1}: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ $f: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$

$$x \rightarrow \text{Arc cos } x$$

$$x \rightarrow \cos x$$

$$(\forall x \in [-1, 1]) \forall y \in [0, \pi] \text{Arc cos } x = y \Leftrightarrow \cos y = x$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) -\frac{\pi}{2} < \text{Arc tan} \left\langle \frac{\pi}{2} \right. \quad (5)$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \tan(\text{Arc tan } x) = x \quad (6)$$

$$\left(\forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\right) \text{Arc tan}(\tan x) = x \quad (7)$$

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}) \text{Arc tan } x = \text{Arc tan } y \Leftrightarrow x = y \quad (8)$$

$$\text{Arc tan } x < \text{Arc tan } y \Leftrightarrow x < y$$

$$\left(\forall x, y \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\right) \tan x = \tan y \Leftrightarrow x = y \quad (9)$$

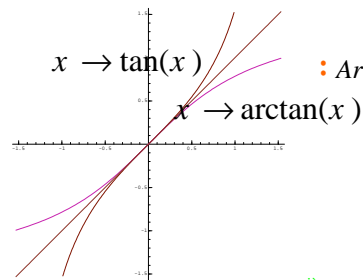
$$\tan x < \tan y \Leftrightarrow x < y$$

(10) الدالة Arc tan فدية.

برهان: نفس برهان Arc sin

ملاحظة:

لكي نبين أن $a = b$ يكفي أن نبين أن $\tan a = \tan b$ و a و b ينتميان إلى $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$



التمثيل المبياني للدالة Arc tan :

(a) تعريف:

ليكن $n \in \mathbb{N}^*$

نعتبر الدالة: $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow x^n$$

* لدينا f متصلة على \mathbb{R}^+

$$f'(x) = nx^{n-1} *$$

لدينا $f'(x) > 0$ على \mathbb{R}^+ ما عدا في 0 حيث تنعدم.

إذن f تزايدية قطعاً على \mathbb{R}^+ .

$$f([0, +\infty[) = [0, +\infty[*$$

إذن f تقابل من \mathbb{R}^+ نحو \mathbb{R}^+ وبالتالي تقبل دالة عكسية

$$. f^{-1}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$$

الدالة f^{-1} تسمى دالة الجذر من الرتبة n ونرمز لها ب $\sqrt[n]{x}$.

تعريف

نسمى دالة الجذر من الرتبة n الدالة العكسية للدالة:

$$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \text{ ونرمز لها ب } \sqrt[n]{x}.$$

$$x \rightarrow x^n$$

ملاحظة:

$$f^{-1}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$x \rightarrow \sqrt[n]{x}$$

$$x \rightarrow x^n$$

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}^+) \sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow y^n = x$$

هذا يعني أن لكل x من \mathbb{R}^+ العدد $\sqrt[n]{x}$ هو العدد y من \mathbb{R}^+ والذي

$$. y^n = x \text{ يحقق}$$

$$\sqrt[n]{x} = y \Rightarrow y^n = x \text{ (*) دأما صحيحة}$$

$$\begin{cases} y^n = x \\ y \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \Rightarrow \sqrt[n]{x} = y$$

(c) الدالة قوس الظل Arc tan gente .

نعتبر الدالة: $f: \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow \tan x$$

لدينا f متصلة على $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$

$$\forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\quad f^{-1}(x) = 1 + \tan^2 x > 0$$

إذن f تزايدية قطعاً على $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$

$$f\left(\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\right) = \left] \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} f(x), \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) \right[=] -\infty, +\infty[= \mathbb{R}$$

إذن f تقابل من $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ نحو \mathbb{R}

وبالتالي تقبل دالة عكسية $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$

f^{-1} تسمى دالة قوس الظل نرسم لها ب Arc tan .

تعريف:

نسمى دالة قوس الظل الدالة العكسية للدالة

$$f: \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\rightarrow \mathbb{R} \text{ ونرمز لها ب Arc tan}$$

$$x \rightarrow \tan x$$

ملاحظة:

$$f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\quad f: \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow \text{Arc tan } x$$

$$x \rightarrow \tan x$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \left(\forall y \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\right) \text{Arc tan } x = y \Leftrightarrow \tan y = x$$

(* لكل x من \mathbb{R} العدد Arc tan هو العدد y من $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ بحيث

$$. \tan y = x$$

$$\text{Arc tan } x = y \Rightarrow \tan y = x \quad (*)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tan y = x \Rightarrow \text{Arc tan } x = y \\ y \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\end{array} \right. \quad (*)$$

أمثلة:

$$\text{Arc tan } \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{Arc tan } 0 = 0$$

$$\text{Arc tan } \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{Arc tan } 1 = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Arc tan } (-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$$

$$\text{Arc tan } (-1) = -\frac{\pi}{4}$$

خاصيات:

(1) الدالة Arc tan تقابل من \mathbb{R} نحو $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$

(2) الدالة Arc tan متصلة على \mathbb{R}

(3) الدالة Arc tan تزايدية قطعاً على \mathbb{R}

$$D_{\text{Arc tan}} = \mathbb{R} \quad (4)$$

لدينا: $x^3 = 7 \Leftrightarrow x^3 = (\sqrt[3]{7})^3 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{7}$ (لأن n فردي)

$$x^3 = -6 \quad (4)$$

لدينا: $x^3 = -6 \Leftrightarrow x^3 = -(\sqrt[3]{6})^3 \Leftrightarrow x^3 = (-\sqrt[3]{6})^3$

(لأن n فردي) $\Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{6}$

(d) العمليات على الجذور من الرتبة n :

خاصية:

ليكن n و p من \mathbb{N}^* و a و b من \mathbb{R}^+

$$(\sqrt[n]{a})^n = a \quad \text{و} \quad \sqrt[n]{a^n} = a \quad (*)$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \quad (*)$$

$$\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[n]{a}^p \quad ; \quad (\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p} \quad (*)$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[np]{a} \quad ; \quad (b > 0) \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad (*)$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[np]{a^{n+p}} \quad (*)$$

ملاحظة:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \quad \text{إذا كان } ab \geq 0$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b > 0)$$

برهان:

* لنبين أن $\sqrt[n]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[np]{a}$

$$\left[\left(\sqrt[n]{\sqrt[n]{a}} \right)^n \right]^p = \left(\sqrt[n]{a} \right)^p = a \quad \text{لدينا:}$$

ولدينا $\sqrt[n]{\sqrt[n]{a}} \in \mathbb{R}^+$

إذن: $\sqrt[n]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[np]{a}$

* لنبين أن $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[np]{a^{n+p}}$

$$\left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \right)^{np} = \left(\left(\sqrt[n]{a} \right)^n \right)^p \cdot \left(\left(\sqrt[n]{a} \right)^p \right)^n$$

$$= a^p \cdot a^n = a^{n+p}$$

ولدينا $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \in \mathbb{R}^+$ إذن $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[np]{a^{n+p}}$

(e) الأس الجذري لعدد حقيقي موجب قطعاً:

تعريف:

ليكن $a > 0$ وليكن $r \in \mathbb{Q}$

$$\text{نفترض أن: } \frac{p}{q} = \frac{p'}{q'} \quad (q, q' \in \mathbb{N}^+) \text{ و } (p, p' \in \mathbb{Z})$$

لنبين أن $\sqrt[q]{a^p} = \sqrt[q']{a^{p'}}$

$$\left(\sqrt[q]{a^p} \right)^{qq'} = a^{pp'}$$

$$\left(\sqrt[q']{a^{p'}} \right)^{qq'} = a^{p'q}$$

ولدينا $pq' = p'q$ إذن: $a^{pp'} = a^{p'q}$

$$\left(\sqrt[q]{a^p} \right)^{qq'} = \left(\sqrt[q']{a^{p'}} \right)^{qq'}$$

إذن: $\sqrt[q]{a^p} = \sqrt[q']{a^{p'}}$

$$a^r = a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} \quad \text{نضع إذن:}$$

(*) لكي نبين أن $\sqrt[n]{\alpha} = \beta$ يكفي أن نبين أن

$$\beta^n = \alpha \quad \beta \in \mathbb{R}^+$$

(*) الجذر من الرتبة 2 هو الجذر مربع.

$$(\forall x \geq 0) \sqrt{x} = \sqrt{x}$$

$$(\forall x \geq 0) \sqrt{x} = x \quad (*)$$

أمثلة:

$$\sqrt[4]{81} = 3$$

$$\sqrt[3]{8} = 2$$

$$-8 = (-2)^3 \Rightarrow \sqrt[3]{-8} = -2$$

$$(-2)^4 = 16 \Rightarrow \sqrt[4]{16} = -2$$

(b) خاصيات:

1- الدالة $\sqrt[n]{\cdot}$ تقابل من \mathbb{R}^+ نحو \mathbb{R}^+

2- الدالة $\sqrt[n]{\cdot}$ متصلة على \mathbb{R}^+

3- الدالة $\sqrt[n]{\cdot}$ تزايدية قطعاً على \mathbb{R}^+

$$D_{\sqrt[n]{\cdot}} = \mathbb{R}^+ \quad -4$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}^+) \sqrt[n]{x} \geq 0 \quad -5$$

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}^+) \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x = y \quad -6$$

$$\sqrt[n]{x} \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$$

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}^+) x^n = y^n \Leftrightarrow x = y \quad -7$$

$$x^n < y^n \Leftrightarrow x < y$$

ملاحظة:

(*) إذا كان n فردي:

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}) x^n = y^n \Leftrightarrow x = y$$

$$x^n < y^n \Leftrightarrow x < y$$

(*) إذا كان n زوجي:

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}) x^n = y^n \Leftrightarrow |x|^n = |y|^n \Leftrightarrow |x| = |y|$$

$$x^n < y^n \Leftrightarrow |x| < |y|$$

(*) لكي نبين أن $a = b$ يكفي أن نبين أن

$$\begin{cases} a^n = b^n \\ a, b \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

8- لنكن f دالة موجبة على مجال I .

(*) إذا كانت f متصلة على I فإن $\sqrt[n]{f}$ متصلة على I .

(*) إذا كانت f تقبل نهاية l في x_0 فإن $\sqrt[n]{f}$ تقبل نهاية $\sqrt[n]{l}$

في x_0 .

(c) حل المعادلة $x^n = a$

أمثلة:

حل في \mathbb{R} المعادلات التالية:

$$x^4 = 16 \quad (1)$$

$$\text{لدينا: } x^4 = 16 \Leftrightarrow |x|^4 = 16 \Leftrightarrow |x| = \sqrt[4]{16}$$

$$\Leftrightarrow |x| = 2$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \text{ أو } x = -2$$

$$\text{إذن: } S = \{2; -2\}$$

$$x^6 = -10 \quad (2)$$

لدينا $x^6 > 0$ و $x^6 = -10$ دائماً موجبة

إذن المعادلة مستحيلة: $S = \emptyset$.

$$x^3 = 7 \quad (3)$$

تعريف

ليكن $0 < a \in \mathbb{Q}$ مع $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ و $p \in \mathbb{Z}$ و $q \in \mathbb{N}^*$

العدد a^r هو العدد المعروف بما يلي: $a^r = a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$

أمثلة:

$$16^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{16^3} = (\sqrt[4]{16})^3 = 2^3 = 8; \quad 8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$$

$$8^{\frac{1}{2}} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$(\forall a \geq 0) a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$$

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

ملاحظة:

باستعمال الأس الجذري العمليات على الجذور من الرتبة n تصبح:

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a; \quad (a^n)^{\frac{1}{n}} = a \quad (*)$$

$$a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}} \quad (*)$$

$$a^{\frac{p}{np}} = a^{\frac{1}{n}} \quad (*)$$

$$\left(a^{\frac{1}{p}}\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{np}}; \quad \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} \quad (*)$$

$$a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{1}{p}} = a^{\frac{n+p}{np}} \quad (*)$$

خاصيات:

ليكن $0 < a, b \in \mathbb{Q}$ و $r, r' \in \mathbb{Q}$

$$a^{-r} = \frac{1}{a^r}; \quad a^r \cdot a^{r'} = a^{r+r'} \quad (*)$$

$$a^r \cdot b^r = (ab)^r; \quad \frac{a^r}{a^{r'}} = a^{r-r'} \quad (*)$$

$$(a^r)^{r'} = a^{r \cdot r'}; \quad \frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r \quad (*)$$

برهان:

- لنبين أن $a^r \cdot a^{r'} = a^{r+r'}$

نضع $r' = \frac{p'}{q'}$ و $r = \frac{p}{q}$

لدينا:

$$a^r \cdot a^{r'} = a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{p'}{q'}}$$

$$= \sqrt[q]{a^p} \cdot \sqrt[q']{a^{p'}}$$

$$= \sqrt[qq']{a^{pp'}} = \sqrt[qq']{a^{pp'}} = \sqrt[qq']{(a^{pp'})^{q+q'}}$$

$$= a^{\frac{qp'+q'p}{qq'}} = a^{\frac{p}{q} + \frac{p'}{q'}} = a^{r+r'}$$