I. النهايات (تذكير)

نشاط 1 :

1) ذكر بتعريف : $\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell$

2) ذكر بتعاريف التالية : أ - $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\ell_g$ ب - $\lim_{x\to -\infty} f(x)=\ell$ ج- $\lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$

3) ذكر بالأشكال الغير المحددة .

4) ذكر ببعض خاصيات النهايات و الترتيب .

جواب :

1) نذكر بتعريف : $\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell$:

1. تعريف 1:

f دالة معرفة بجوار x_0. (أي $]x_0-r,x_0+r[\setminus\{x_0\}\subset D_f$). مع $r>0$.

نقول إن $f(x)$ يؤول إلى العدد الحقيقي ℓ عندما يؤول x إلى a لنعني أن : $f(x)-\ell$ يؤول إلى 0 عندما يؤول x إلى a .

أو أيضا : $\forall\varepsilon>0 , \exists\alpha>0 , 0<|x-x_0|<\alpha \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$.

نرمز لذلك ب : $\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell$.

2) نذكر بالتعاريف التالية :

أ - تعريف ل : $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\ell_g$.

2. تعريف 2 :

f دالة عددية معرفة على يسار x_0. (أي $]x_0-r,x_0[\subset D_f$). مع $r>0$.

نقول إن $f(x)$ يؤول إلى العدد الحقيقي ℓ_g عندما يؤول x إلى a على اليسار لنعني أن

$\forall\varepsilon>0 , \exists\alpha>0 , 0<x_0-x<\alpha \Rightarrow |f(x)-\ell_g|<\varepsilon$.

نرمز لذلك ب : $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\ell_g$ أو أيضا $\lim_{\substack{x\to x\\ x<x_0}} f(x)=\ell_g$.

ب - تعريف ل : $\lim_{x\to -\infty} f(x)=\ell$

3. تعريف3: $\lim_{x\to -\infty} f(x)=\ell$

f دالة معرفة بجوار $-\infty$. (أي $]-\infty,b]\subset D_f$).

نقول إن $f(x)$ يؤول إلى العدد الحقيقي ℓ عندما يؤول x إلى $+\infty$ لنعني أن : $\forall\varepsilon>0 , \exists B>0 , \alpha<-B \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$

نرمز لذلك ب : $\lim_{x\to -\infty} f(x)=\ell$

ج- تعريف ل : $\lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$

4. تعريف4: $\lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$

f دالة معرفة بجوار $+\infty$. (أي $]b,+\infty[\subset D_f$).

نقول إن $f(x)$ تؤول إلى $+\infty$ عندما يؤول x إلى $+\infty$ لنعني أن: $\forall A>0 , \exists B>0 , \alpha>B \Rightarrow f(x)>A$

نرمز لذلك ب : $\lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$

3) الأشكال الغير المحددة هي :

1) $(+\infty)+(-\infty)$; $(-\infty)+(+\infty)$ 2) $0\times(\pm\infty)$ 3) $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ 4) $\frac{0}{0}$ 5) 0^0 .

4) نذكر بعض خاصيات النهايات و الترتيب .

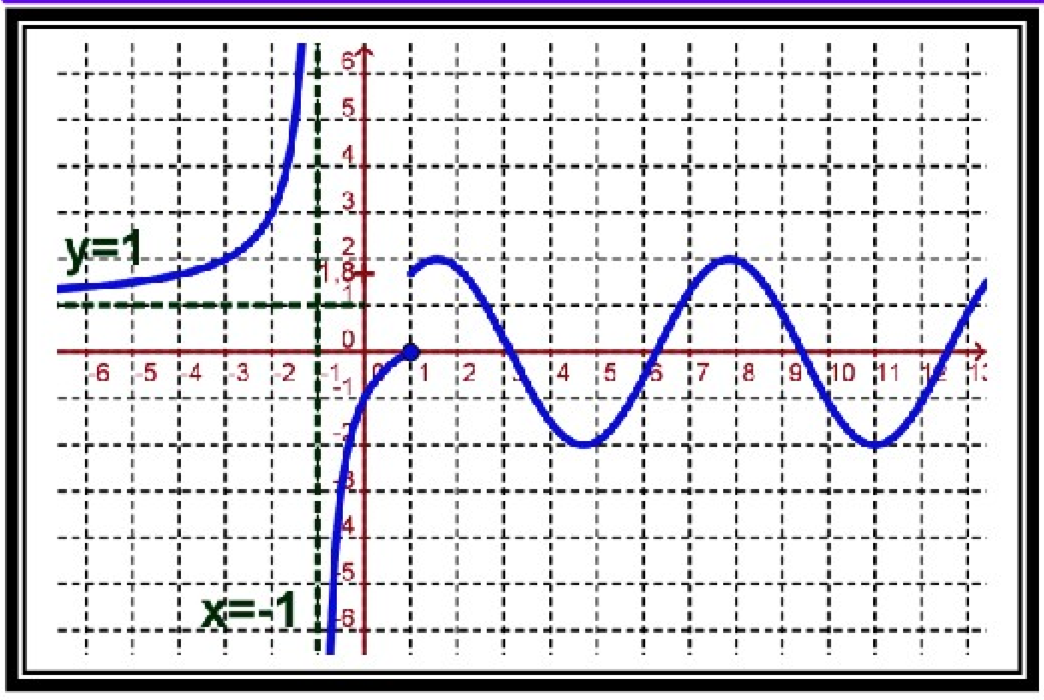
f و g و h دوال عددية حيث :

- إذا كان $f(x)\le g(x)$ و $\lim\limits_{x\to ?} f(x)=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to ?} g(x)=+\infty$.
- إذا كان $f(x)\le g(x)$ و $\lim\limits_{x\to ?} g(x)=-\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to ?} f(x)=-\infty$.
- إذا كان $f(x)\le h(x)\le g(x)$ و $\lim\limits_{x\to ?} f(x)=\lim\limits_{x\to ?} g(x)=\ell$ فإن $\lim\limits_{x\to ?} h(x)=\ell$.

نشاط 2 :

1. تمرين 5 :

الرسم التالي يمثل منحنى دالة f .



أ- حدد مبيانيا D_f مجموعة تعريف الدالة f.

ب- استنتج مبيانيا نهايات f عند محدات D_f و كذلك في 1.

2. تمرين 1 :

أحسب النهايات التالية : $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x^5+1)^3(3x+2)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} x+|x+2|$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x-1}{|4-2x|}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x-\sqrt{4x^2-8x}$.

3. تمرين 2 :

حدد a علما أن f لها نهاية في 3 حيث f معرفة كما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x-3}{2-\sqrt{x+1}} & ;\ x>3 \\ f(x)=\dfrac{a}{x-1} & ;\ x\le 3 \end{cases}$$

4. تمرين 3 :

أحسب : $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin \pi x}{x-1}$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2+\cos x}{1+x^2}$.

5. تمرين 4 :

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي : $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{1-|x-1|}$.

أ- حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f.

ب- أحسب نهايات f عند محدات D_f.

II. اتصال دالة عددية في نقطة x_0 :

01. نشاط 1 :

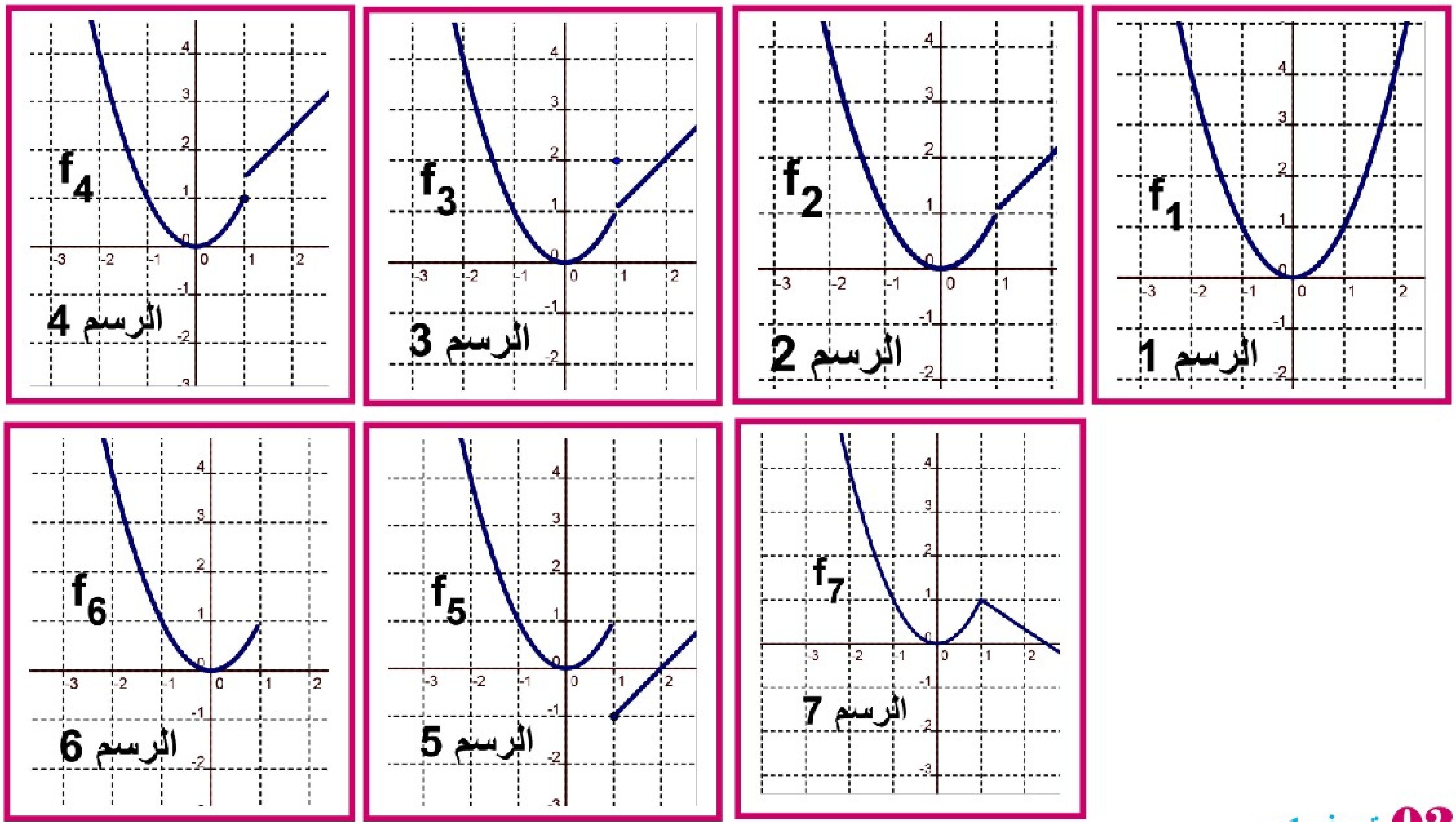
المنحنيات التالية تمثل الدوال f_i مع $i\in\{1,2,3,4,5,6,7\}$. نأخذ النقطة التي أفصولها $x_0=1$.

1) نأخذ النقطة التي أفصولها $x_0 = 1$ ماذا تلاحظ ؟

2) استنتج مبيانيا $\lim\limits_{x\to 1} f_i(x)$ مع $i\in\{1,2,3,4,5,6,7\}$

3) الرسم 1 و 7 يمثلان دالتين متصلتين في النقطة $x_0 = 1$ و في الحالات الأخرى غير متصلة في النقطة $x_0 = 1$.

4) أعط تعريف لاتصال دالة في نقطة x_0 .



02. تعريف 1 :

f دالة عددية يحتوي حيز تعريفها على مجال من نوع $I_{x_0} =]x_0 - r, x_0 + r[$ $(r>0)$ معرفة على مجال مفتوح I و x_0 من I.

f متصلة في x_0 يكافئ : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

03. تعريف 1 :

f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I و x_0 من I.

f متصلة في x_0 يكافئ : $\forall\varepsilon>0 , \exists\alpha>0 , |x-x_0|<\alpha \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

III. الاتصال على اليمين والاتصال على اليسار في نقطة x_0

01. تعريف 1 – 2:

- f دالة عددية معرفة على $I_d = [x_0 , x_0 + r[$ حيث $r>0$. f متصل على يمين في x_0 يكافئ : $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} f(x) = f(x_0)$
- f دالة عددية معرفة على $I_g =]x_0 - r, x_0]$ حيث $r>0$. f متصل على يسار في x_0 يكافئ : $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x<x_0}} f(x) = f(x_0)$

02. أمثلة:

نأخذ النشاط السابق أدرس مبيانيا اتصال بعض من f_i على يمين و يسار النقطة $x_0 = 1$ مع $i \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$.

03. خاصية :

دالة f متصلة في x_0 يكافئ f متصل على يسار و على يمين x_0.

IV. التمديد بالاتصال في النقطة x_0 le prolongement par continuité

01. تذكير :

E و F و G ثلاث مجموعات f و g دالتان عدديتان حيث : $f : E \to G$ و $g : F \to G$.

إذا كان $F \subset E$ و $\forall x \in F : f(x) = g(x)$.

- f تسمى تمديد بالاتصال (prolongement) ل g.
- g تسمى قصور (restriction) f على F. نكتب : $g = f_{/F}$.

02. تعريف و خاصية :

f دالة عددية يحتوي حيز تعريفها على مجال من نوع $I^*_{x_0} =]x_0 - r, x_0 + r[\setminus \{x_0\}$ مع $r > 0$. حيث :

- f غير معرفة في x_0
- $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$.

الدالة g المعرفة ب : $\begin{cases} g(x) = f(x) \ ; x \in D_f \ , x \neq x_0 \\ g(x_0) = \ell \end{cases}$ هي متصلة في x_0.

الدالة g تسمى تمديد بالاتصال للدالة f في النقطة x_0

03. مثال:

$f(x) = \dfrac{x^2 - |x|}{|x| - 1}$: لدينا $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$.

$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \dfrac{|x|(|x| - 1)}{|x| - 1} \lim_{x \to 1} |x| = 1$.

- و بالتالي الدالة g المعرفة ب: $\begin{cases} g(x) = \dfrac{x^2 - |x|}{|x| - 1} \ ; x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\} \\ g(1) = 1 \end{cases}$ هي تمديد بالاتصال للدالة f في النقطة $x_0 = 1$.
- كذلك الدالة h المعرفة ب: $\begin{cases} h(x) = \dfrac{x^2 - |x|}{|x| - 1} \ ; x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\} \\ h(-1) = 1 \end{cases}$ هي تمديد بالاتصال للدالة f في النقطة $x_0 = -1$.

- كذلك الدالة k المعرفة ب: $\begin{cases} k(x)=\dfrac{x^2-|x|}{|x|-1} \; ; x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\} \\ k(-1)=k(1)=1 \end{cases}$ هي تمديد بالاتصال للدالة f في النقطة $x_0=-1$ و في $x_0=1$.

ملحوظة : يمكن كتابة الدالة k على الشكل التالي : $k(x)=|x|$

V. اتصال دالة على مجال

01. تعاريف:

- f دالة متصلة على مجال مفتوح I $(I=]a;b[)$ يكافئ f متصلة في كل نقطة x_0 من I.
- f دالة متصلة على مجال $I=[a,b]$ يكافئ : f متصلة على $]a,b[$ و متصلة على يمين a و متصلة على يسار b.
- f دالة متصلة على مجال $[a,+\infty[$ يكافئ : f متصلة في كل نقطة x_0 من $]a,+\infty[$ و f متصلة على يمين في a.

02. مثال:

لنعتبر الدالة: $f(x)=x^2+3x$.

بين أن : f متصلة على المجال المفتوح $I=]1;5[$.

VI. اتصال الدوال الاعتيادية:

01. خاصية:

- كل دالة حدودية فهي متصلة على مجموعة تعريفها $D_f=\mathbb{R}$
- كل دالة جذرية فهي متصلة على مجموعة تعريفها D_f .
- $f(x)=\sin x$ و $f(x)=\cos x$ متصلتين على $D_f=\mathbb{R}$.
- الدالة: $f(x)=\tan x$ متصلة على $D_f=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi ; k\in\mathbb{Z}\right\}$
- الدالة: $f(x)=\sqrt{x}$ متصلة على مجموعة تعريفها $D_f=\mathbb{R}^+=[0,+\infty[$

VII. دالة الجزء الصحيح :

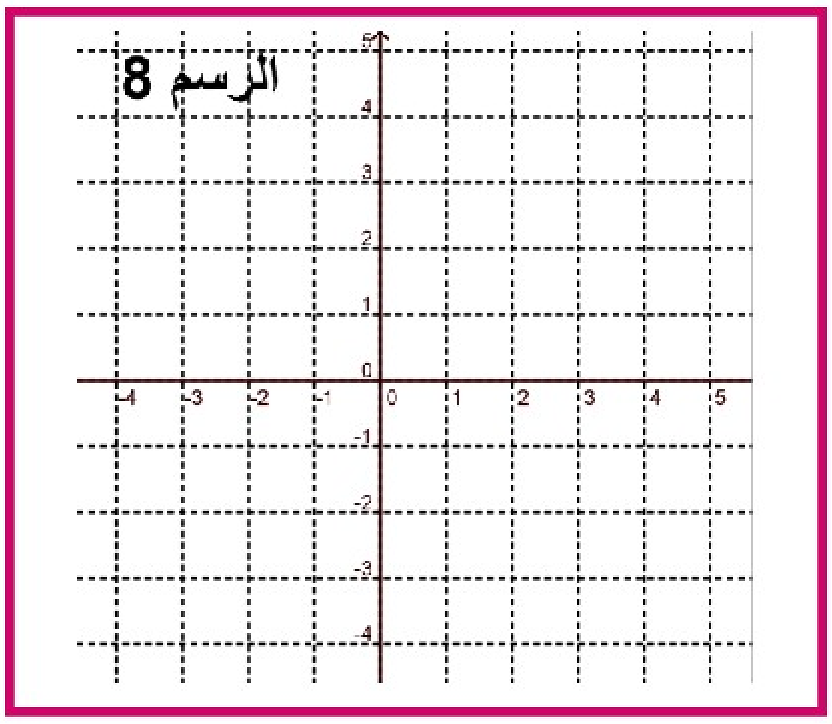
01. تعريف: (تذكير)

الدالة f التي تربط كل عنصر x من $\mathbb{R}$ بالعدد الصحيح النسبي الوحيد p الذي يحقق $p\le x<p+1$. تسمى الدالة الجزء الصحيح

ويرمز لها ب E أو أيضا $[\ ]$ نكتب $f(x)=[x]=p$ أو $f(x)=E(x)=p$

02. نشاط:

1) أنشئ منحنى الدالة $f(x)=E(x)$.
2) هل f متصلة على يمين في 0 و 1 و 2 و 3 و 1- و 2- .
3) هل f متصلة على يسار في 0 و 1 و 2 و 3 و 1 - و 2 - .
4) هل f متصلة في 0 و 1 و 2 و 3 و 1- و 2- ....
5) هل f متصلة على $[0;1[$ و $[1;2[$ و $[2;3[$....
6) أعط الخاصية.



03. خاصية:

- دالة الجزء الصحيح متصلة على اليمين في p وغير متصلة على اليسار في p (إذن هي غير متصلة في p).
- دالة الجزء الصحيح متصلة على كل المجالات التي هي على شكل: $[p,p+1[$ (مع $p\in\mathbb{Z}$)

VIII. صورة مجال بدالة متصلة :

01. نشاط:

نأخذ النشاط أول الدرس و الرسم رقم 1 الذي يمثل الدالة: $f(x)=x^2$

1) استنتج مبيانيا صور جميع الأعداد التي تنتمي إلى القطعة $[0,2]$

2) استنتج مبيانيا : $f([-1,0])$ و $f([-1,2])$. أعط الخاصية.

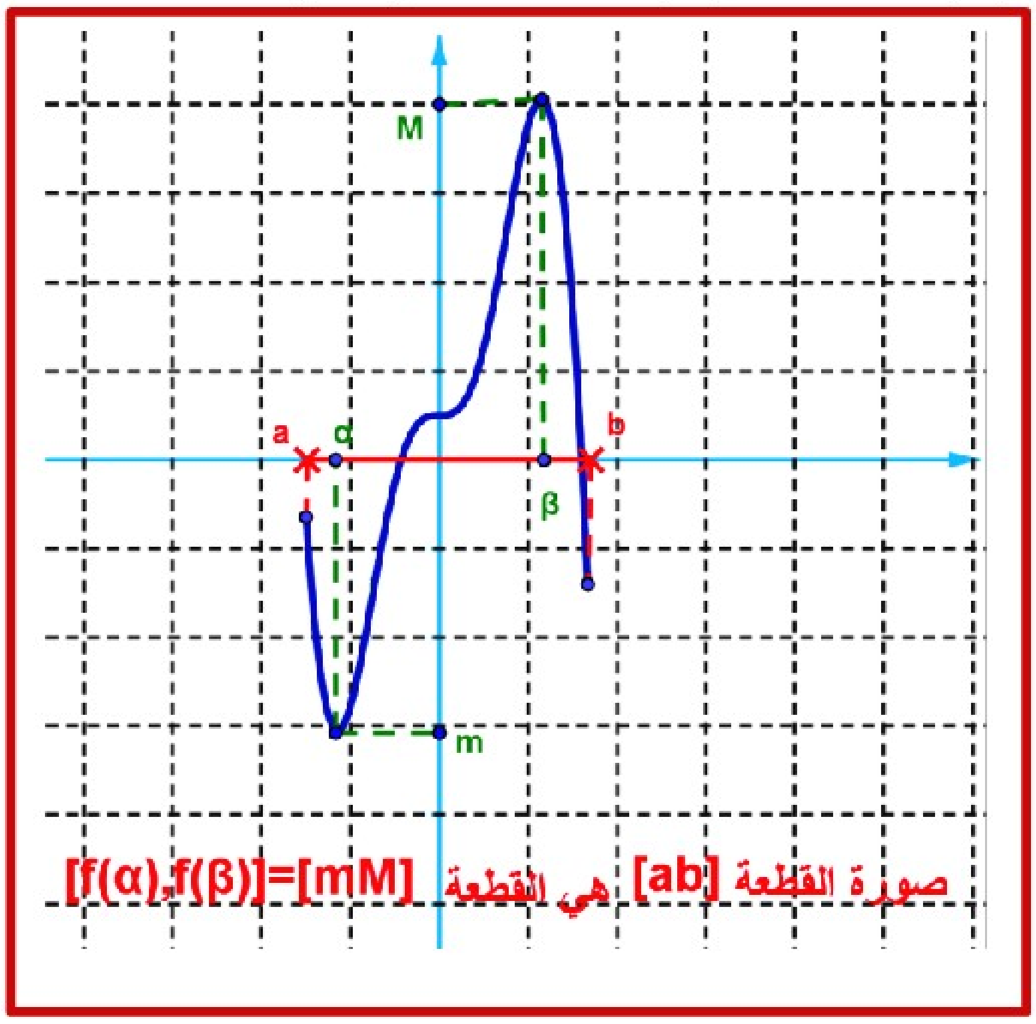
02. خاصية:

- صورة قطعة $[a,b]$ بدالة متصلة f هي قطعة (تكون على شكل $[m,M]$ مع m و M هي القيمة الدنيا والقيمة القصوى على التوالي ل f على المجال $[a,b]$). (أو أيضا : $m=\min\limits_{a\le x\le b} f(x)$ و $M=\max\limits_{a\le x\le b} f(x)$)
- صورة مجال I بدالة متصلة f هي مجال $J=f(I)$.
- ملاحظة : $f([a,b])=[m,M]$.

03. مثال : 1

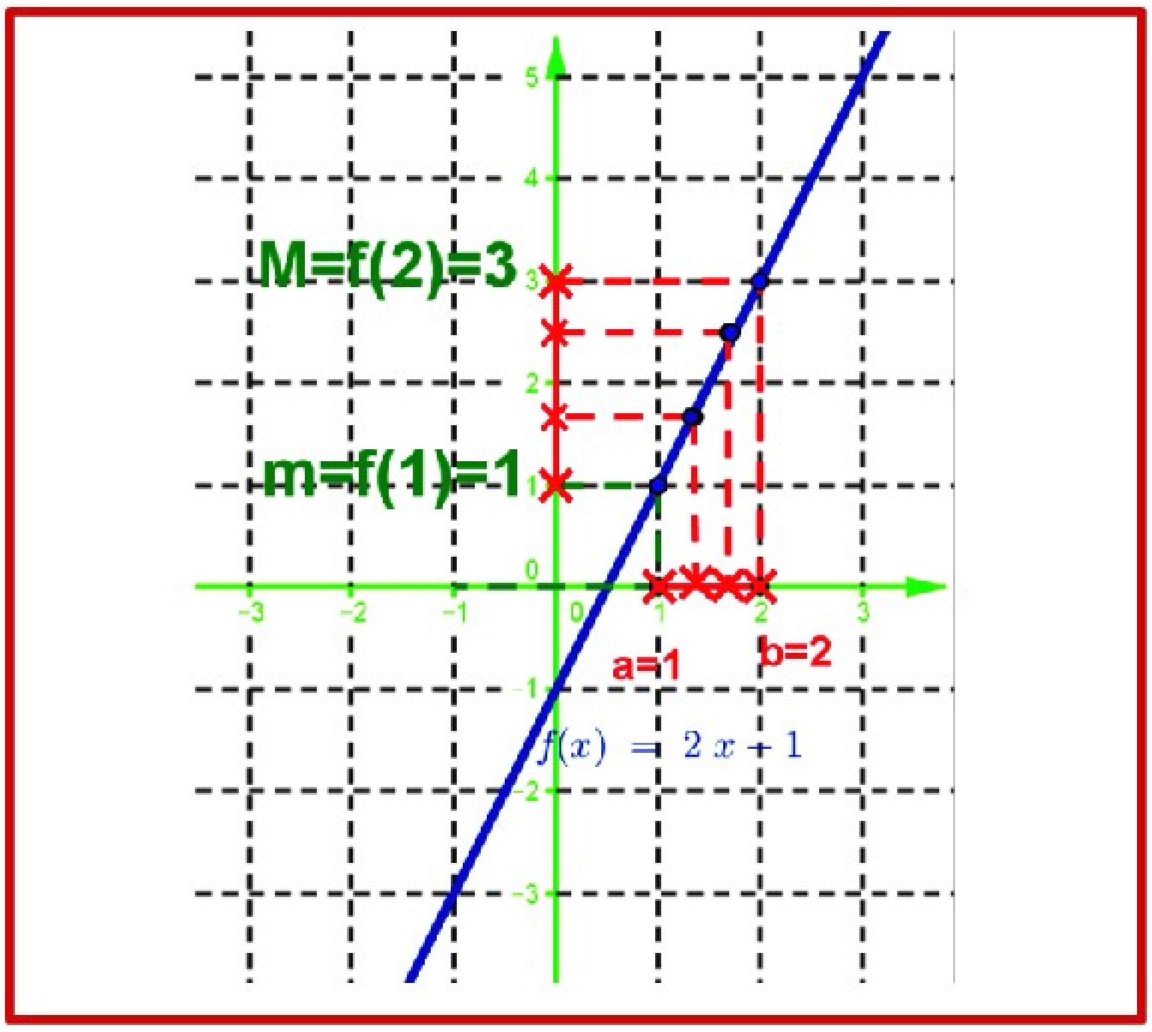
نضع : $m=\min\limits_{a\le x\le b} f(x)$ و $M=\max\limits_{a\le x\le b} f(x)$.

$\exists(\alpha,\beta)\in I^2 / m=f(\alpha)$ و $M=f(\beta)$



مثال : 2 $f(x)=2x-1$ لدينا مبيانيا : $f([1,2])=[1,3]$

$f([1,2[)=[1,3[$



IX. مبرهنة القيم الوسيطية: théorème des valeurs intermédiaires

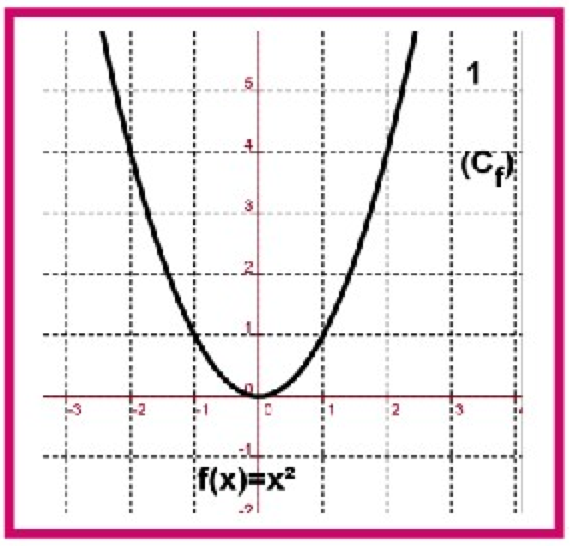
01. نشاط:

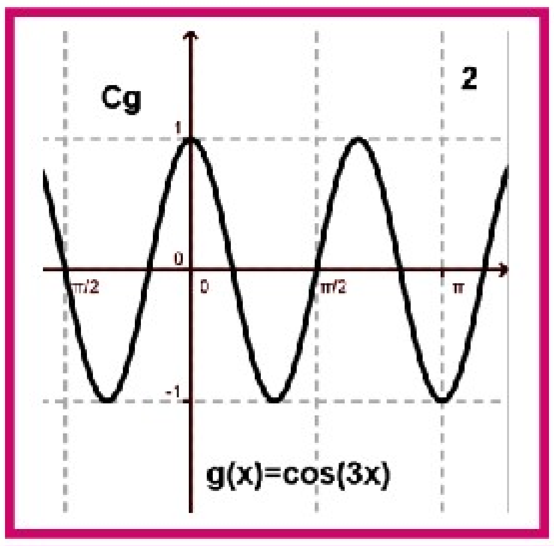
نأخذ $a=1$ و $b=-2$ في الرسم 1 ؛ $a=0$ و $b=\pi$ (الرسم2)

1) استنتج مبيانيا $f(a)$ و $f(b)$. (الرسم 1)

2) نأخذ عدد k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ هل يوجد على الأقل عنصر c من $[a,b]=[-2,1]$ حيث : $f(c)=k$. (الرسم 1)

3) أعط الخاصية:





02. خاصية:

f دالة متصلة على القطعة $[a,b]$.

- لكل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ يوجد على الأقل عنصر c من $[a,b]$ حيث : $f(c)=k$.

03. برهان :

نضع $f([a,b])=[m,M]$ لأن f متصلة على $[a,b]$.

حالة 1 : $f(a)\leq f(b)$.

$k\in[f(a),f(b)]\subset[m,M]$ إذن $k\in[m,M]=f([a,b])$.

ومنه : $\exists c\in[a,b]\ /\ k=f(c)$

إذن : كل عدد k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ يوجد على الأقل عنصر c من $[a,b]$ حيث : $f(c)=k$.

04. نتائج :

- بما أن : صورة قطعة $[a,b]$ بدالة متصلة هي القطعة: $f([a,b])=[m,M]$ إذن $k\in f([a,b])=[m,M]$.
- إذا كان : $f(a)\times f(b)<0$ أي $f(a)$ و $f(b)$ (احدهما موجب و الآخر سالب) ومنه : $k=0\in f([a,b])=[m;M]$ ومنه يوجد عنصر c من $[a,b]$ حيث : $f(c)=k=0$
- نتيجة $(f(a)\times f(b)<0)$: المعادلة : $x\in[a,b]/f(x)=0$ تقبل على الأقل حل على $[a,b]$.
- إذا كانت f رتيبة قطعا على $[a,b]$ فإن c وحيد . ومنه المعادلة : $x\in[a,b]/f(x)=0$ تقبل حل و حيد على $[a,b]$.

X. دالة متصلة و رتيبة قطعا:

01. نشاط: f دالة متصلة و رتيبة قطعا. لدينا صور المجالات الآتية

المجال I	f متصلة و تزايدية قطعا نحدد : المجال $f(I)$	f متصلة وتناقصية قطعا نحدد: المجال $f(I)$	المجال I	f متصلة و تزايدية قطعا نحدد : المجال $f(I)$	f متصلة وتناقصية قطعا نحدد: المجال $f(I)$
$[a,b]$	$[f(a),f(b)]$	$[f(b),f(a)]$	$]a,+\infty[$	$]\lim_{x\to a^+} f(x),\lim_{x\to+\infty} f(x)[$	$]\lim_{x\to+\infty} f(x),\lim_{x\to a^+} f(x)[$
$[a,b[$	$[f(a),\lim_{x\to b^-} f(x)[$	$]\lim_{x\to b^-} f(x),f(a)]$	$]-\infty,a]$	$]\lim_{x\to-\infty} f(x),f(a)]$	$[f(a),\lim_{x\to-\infty} f(x)[$

$]a,b]$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x), f(b)\right]$	$\left[f(b), \lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$	$]-\infty,a[$	$\left]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to a^-} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^-} f(x), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right[$
$]a,b[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x), \lim\limits_{x\to b^-} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-} f(x), \lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$	$]-\infty,+\infty[$	$\left]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right[$
$[a,+\infty[$	$\left[f(a), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), f(a)\right]$			

02. نتيجة :

إذا كانت f دالة متصلة و رتيبة قطعا على المجال $[a,b]$

- فإنه لكل عدد محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ يوجد عدد وحيد c من $[a,b]$ حيث: $f(c)=k$.
- إذا كان $f(a)\times f(b)<0$ المعادلة $x\in[a;b]/f(x)=0$ تقبل حل وحيد .

XI. العمليات على الدوال المتصلة:

01. خاصية: (تقبل)

I مجال ضمن المجموعة $\mathbb{R}$ $(I\subset\mathbb{R})$.

- إذا كانت f و g دالتين متصلتين على المجال I فإن الدوال: $f+g$ و $f\times g$ و $\alpha f,(\alpha\in\mathbb{R})$ متصلة على I.
- إذا كانت f و g دالتين متصلتين على المجال I و g لا تنعدم على المجال I فإن الدوال: $\frac{1}{g}$ و $\frac{f}{g}$ متصلة على I.

02. مثال:

لنعتبر الدوال التالية المعرفة ب: 1) $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}+\cos(x)$. 2) $g(x)=\left(x^2+3x-2\right)\times\sqrt{x}$

1) حدد مجموعة تعريف واتصال كل دالة من الدوال السابقة.

جواب

1) نحدد مجموعة تعريف:

- الدالة $x\to\cos x$ معرفة و متصلة على $\mathbb{R}$.

الدالة $x\to\dfrac{2x+1}{x-1}$ معرفة و متصلة على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

إذن الدالة $x\to\dfrac{2x+1}{x-1}+\cos x$ معرفة و متصلة على $D_f=\mathbb{R}\cap\left(\mathbb{R}\setminus\{1\}\right)=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

- الدالة $x\to x^2+3x-2$ معرفة و متصلة على $\mathbb{R}$.

الدالة $x\to\sqrt{x}$ معرفة ومتصلة على $\mathbb{R}^+=[0,+\infty[$.إذن الدالة $x\to\left(x^2+3x-2\right)\sqrt{x}$ معرفة و متصلة على $D_g=\mathbb{R}\cap\mathbb{R}^+=\mathbb{R}^+$.

XII. اتصال مركبة دالتين متصلتين:

تذكير : $I\xrightarrow{f}f(I)$ و $J\xrightarrow{g}\mathbb{R}$ و $f(I)\subset J$

$$g\circ f:\ I\xrightarrow{f}f(I)\subset J\xrightarrow{g}\mathbb{R}$$

$$x\xrightarrow{f}f(x)\xrightarrow{g}g(f(x))$$

01. خاصية:

لتكن f و g دالتين عدديتين.
إذا كانت f متصلة على مجال I و g متصلة على مجال J حيث: $f(I)\subset J$ فإن الدالة $g\circ f$ متصلة على I.

02. مثال: أدرس اتصال الدالة $f(x)=\sin(2x+1)$.

الدالة $x\to 2x+1$ متصلة على $\mathbb{R}$.
الدالة $x\to \sin x$ متصلة على $\mathbb{R}$ و $f(\mathbb{R})\subset\mathbb{R}$. إذن الدالة: $x\to\sin(2x+1)$ متصلة على $\mathbb{R}$. (لا نها مركبة دالتين متصلتين)

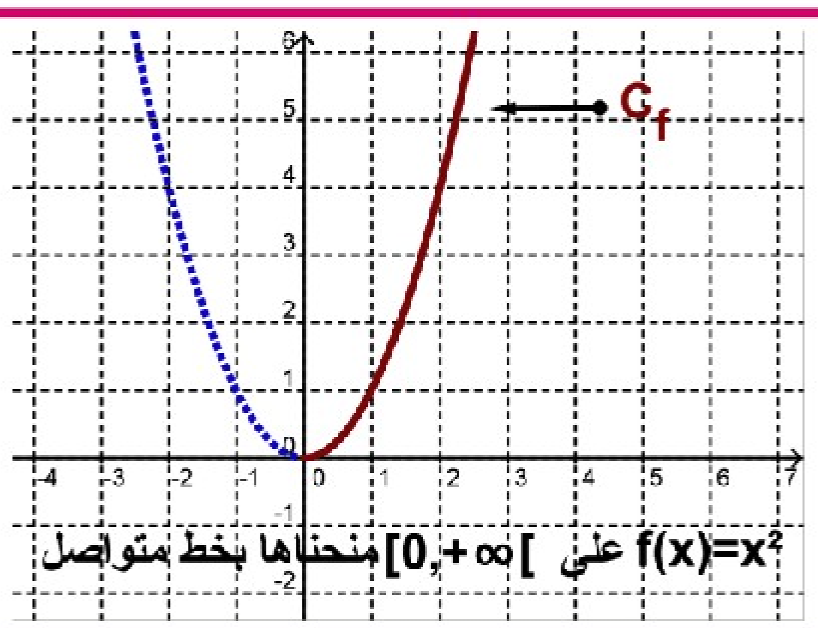
03. نتائج:

- $f(x)=\sin(ax+b)$ و $g(x)=\cos(ax+b)$ دالتان متصلتان على $\mathbb{R}$.
- الدالة $h(x)=\tan(ax+b)$ متصلة في كل x تحقق ما يلي $ax+b\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$.
- f دالة موجبة و متصلة على المجال I فإن الدالة $x\mapsto\sqrt{f(x)}$ متصلة على I.

XIII. الدالة العكسية لدالة متصلة و رتيبة على قطعا على مجال:

01. نشاط: $f(x)=x^2$ على $I=[0;+\infty[$

1) مبيانيا هل الدالة f متصلة و رتيبة قطعا على المجال $I=[0;+\infty[$
2) استنتج مبيانيا $J=f(I)$ (أي صورة المجال I ب f).
3) هل لكل y من $J=f(I)$ له سابق وحيد c من I.
4) استنتج طبيعة التطبيق f .
5) لنعتبر المعادلة : $(E): x\in I=[0,+\infty[\ / f(x)=y$
استنتج عدد حلول المعادلة (E).



02. خاصية ☹

f دالة عددية متصلة و رتيبة قطعا على مجال I و $y\in f(I)$.

- الدالة f هي تقابل من I إلى $f(I)$.
- المعادلة : $x\in I/f(x)=y$ تقبل حل وحيد على I.

03. برهان :

- بما أن صورة مجال I بدالة متصلة f هو المجال $f(I)$ إذن الدالة f شمولية من I نحو $f(I)$.
- نبين أن f تباينية من I نحو $f(I)$.
  - ❖ نفترض أن f تزايدية قطعا على I .

أي نبين : $\forall x,x'\in I: f(x)=f(x')\Rightarrow x=x'$. أو أيضا : $\forall x,x'\in I: x\neq x'\Rightarrow f(x)\neq f(x')$

ليكن x و x' من I حيث $x\neq x'$ (أي $x<x'$ أو $x>x'$) . $f(x)=f(x')$

حالة 1 : $x<x'$
$x<x'$ إذن $f(x)<f(x')$ (لأن f تزايدية قطعا على I)
إذن $f(x)\neq f(x')$.

حالة 2 : $x>x'$
$x>x'$ إذن $f(x)>f(x')$ (لأن f تزايدية قطعا على I)
إذن $f(x)\neq f(x')$.

خلاصة : $\forall x,x' \in I : x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$ أي f f تباينية من I نحو $f(I)$ حالة f تزايدية قطعا على I.

❖ نفترض أن f تناقصية قطعا على I . بنفس الطريقة نبين أن : f تباينية من I نحو $f(I)$.

خلاصة : الدالة f هي تقابل من I إلى $f(I)$.

04. تعريف:

f تقابل من I إلى J. الدالة g المعرفة بما يلي:

$$g : J \to I$$
$$y \to g(y) = x$$

مع $f(x) = y$ تسمى الدالة العكسية للدالة f ونرمز لها: $g = f^{-1}$

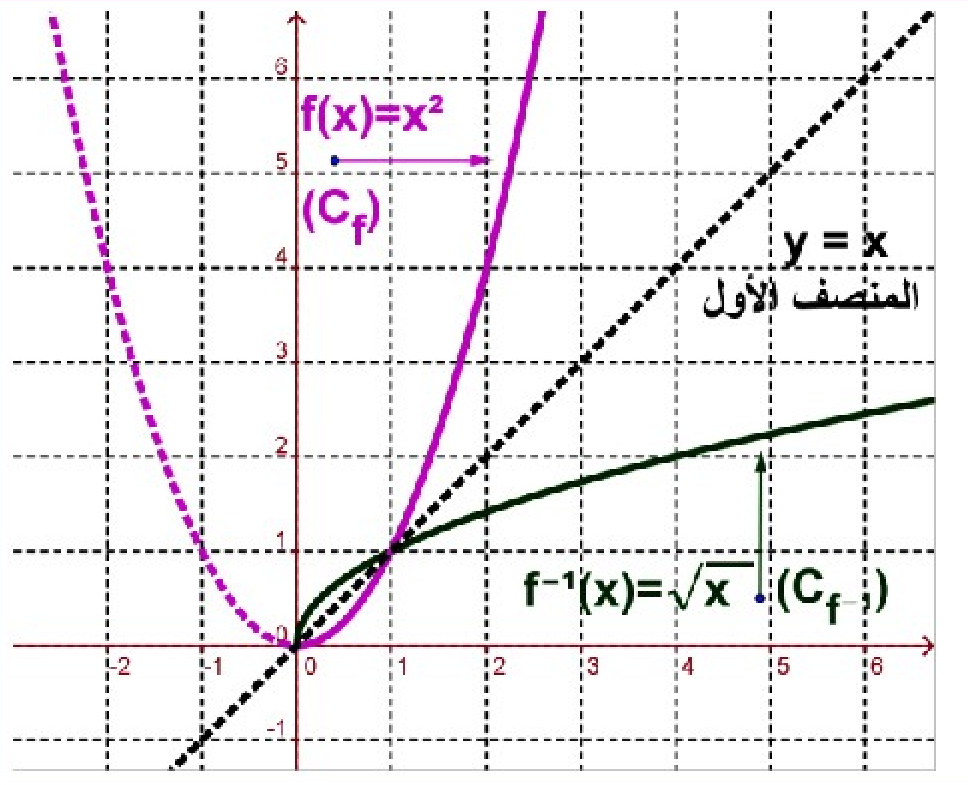
05. ملاحظة:

- الدالة f معرفة كما يلي: $f : I \to J=f(I)$ ، $x \to f(x) = y$
- الدالة f^{-1} معرفة كما يلي: $f^{-1}:J=f(I) \to I$ ، $y \to f^{-1}(y) = x$
- $\left.\begin{matrix} f(x)=y \\ x\in I \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} f^{-1}(y)=x \\ y\in J \end{matrix}\right.$
- $\forall x\in I : f^{-1}\circ f(x) = x$. $\forall y\in J : f\circ f^{-1}(y) = y$.
- ويمكن كتابة $\forall y\in J : f\circ f^{-1}(y) = y$ كذلك على الشكل التالي : $\forall x\in J : f\circ f^{-1}(x) = x$

06. خاصيات الدالة العكسية: (تقبل)

f دالة عددية متصلة و رتيبة قطعا على مجال I و $J = f(I)$. f^{-1} الدالة العكسية ل f.

1. الدالة f^{-1} متصلة على المجال $J = f(I)$. (تقبل)
2. الدالة f^{-1} رتيبة قطعا على المجال J و لها نفس رتابة f على I
3. $(C_{f^{-1}})$ منحنى الدالة f^{-1} و (C_f) منحنى الدالة f متماثلان بالنسبة للمستقيم (D) الذي معادلته $(D) : y = x$ في معلم متعامد ممنظم (المستقيم (D) يسمى المنصف الأول)



07. مثال: لنعتبر الدالة f المعرفة ب: $f(x) = x^2$

1) أ – مبيانيا هل f متصلة على $I = [0;+\infty[$.

ب - استنتج رتابة f على I.

ج - حدد: $J = f(I)$.

د – هل f تقبل دالة عكسية معرفة على مجال يجب تحديده.

2) حدد: f^{-1}. (C_f) منحنى الدالة f. $(C_{f^{-1}})$ منحنى الدالة f^{-1}

08. مفردات :

الدالة العكسية f^{-1} المحصل عليها تسمى كذلك الجذر من الرتبة 2 . و نرمز لها ب: $f^{-1}=\sqrt[2]{\ }$ أو باختصار : $f^{-1}=\sqrt{\ }$

XIV. الدالة قوس الظل : la fonction arctangente

01. خاصية :

الدالة $f(x)=\tan x$ تقابل من $I=\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ إلى $J=\mathbb{R}$.

دالتها f^{-1} العكسية تسمى الدالة قوس الظل ونرمز لها ب : $f^{-1}=\arctan$.

لدينا : $f^{-1}:\mathbb{R}\to I=\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

$x\mapsto f^{-1}(x)=\arctan x$

02. برهان :

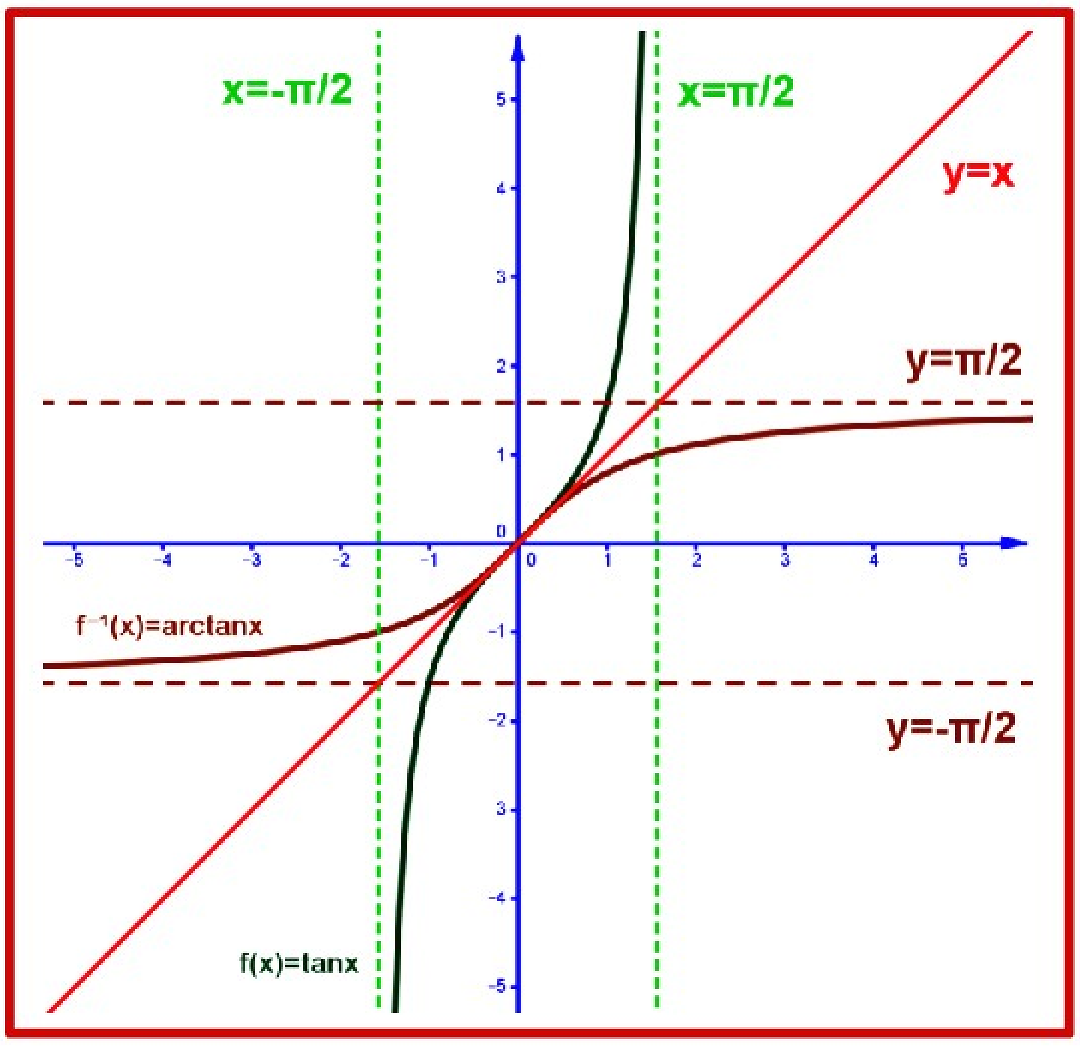
لدينا الدالة $f(x)=\tan x$ متصلة على $I=\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ و تزايدية قطعا على $I=\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ لأن $f'(x)=1+\tan^2 x>0$ إذن f تقابل من $I=\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ إلى $f(I)=\mathbb{R}$ لأن $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\tan x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+}\tan x=-\infty$.

03. نتائج :

- لدينا : $f:\mathbb{R}\to I=\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ ، $x\mapsto f(x)=\arctan x$.
- مجموعة تعريف الدالة $f(x)=\arctan x$ هي $D_f=\mathbb{R}$.
- $\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ -\frac{\pi}{2}<\arctan x<\frac{\pi}{2}$.
- الدالة $f(x)=\arctan x$ متصلة و تزايدية على $\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$.
- $\left.\begin{array}{l}\tan x=y\\ x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\arctan y=x\\ y\in\mathbb{R}\end{array}\right.$
- $\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ \tan(\arctan x)=x$

  $\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\ ;\ \arctan(\tan x)=x$.
- منحنى $(C_{f^{-1}})$ للدالة $f^{-1}(x)=\arctan x$ هو مماثل (C_f) منحنى الدالة $f(x)=\tan x$ بالنسبة للمنصف الأول في معلم متعامد ممنظم .

(المنصف الأول هو المستقيم (D) الذي معادلته $(D):y=x$).



04. تمرين تطبيقي :

- $f(x)=\arctan\frac{1}{x-1}$ حدد D_f مجموعة تعريف f .
- أحسب : $f(0)$ و $f(2)$ و $f(1+\sqrt{3})$ و $f\left(1+\frac{1}{\tan\left(\frac{9\pi}{4}\right)}\right)$.
- أحسب : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$.

XV. دالة الجذر من الرتبة n

01. نشاط:

$n\in\mathbb{N}^*$. لنعتبر الدالة $f(x)=x^n$ على المجال $I=[0;+\infty[$.

بين أن الدالة f تقبل دالة عكسية f^{-1} على المجال J حدده .

02. مفردات:

- الدالة العكسية f^{-1} تسمى الدالة الجذر من الرتبة n .
- الدالة العكسية f^{-1} يرمز لها ب: $f^{-1}=\sqrt[n]{\ }$.
- نكتب: $f^{-1}(x)=\sqrt[n]{x}$. أو أيضا $f^{-1}(x)=\sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}}$
- حالة : $n=1$ لدينا $f^{-1}(x)=\sqrt[1]{x}=x$ (حالة غير مهمة).
- حالة : $n=2$ لدينا $f^{-1}(x)=\sqrt[2]{x}=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$. (الدالة تسمى باختصار الجذر المربع)
- حالة : $n=3$ لدينا $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$. (الدالة تسمى باختصار الجذر المكعب أو الجذر الثالث).

03. تعريف وخاصية:

n عدد صحيح طبيعي غير منعدم.

- الدالة $f(x)=x^n$ متصلة و تزايدية قطعا على $I=[0;+\infty[$.
- f تقابل من I إلى $J=f(I)=[0,+\infty[$ و دالتها العكسية f^{-1} تسمى الدالة الجذر من الرتبة n و نرمز لها: $f^{-1}=\sqrt[n]{\ }$
- نكتب : $f^{-1}(x)=\sqrt[n]{x}$. أو أيضا: $f^{-1}(x)=\sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}}$
- العدد: $\sqrt[n]{a}$ يسمى الجذر من الرتبة n للعدد الحقيقي الموجب a .

04. خاصية:

- $\sqrt[n]{0}=0$; $\sqrt[n]{1}=1$. $\sqrt[n]{x^n}=x$ و $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n=x$; $\forall x\geq0$. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[n]{x}=+\infty$.
- منحنى $(C_{f^{-1}})$ لدالة $f^{-1}(x)=\sqrt[n]{x}$ هو مماثل (C_f) منحنى الدالة $f(x)=x^n$ بالنسبة للمنصف الأول في معلم متعامد ممنظم

(المنصف الأول هو المستقيم (D) الذي معادلته $(D):y=x$).

05. نتائج:

- $\forall a\in \mathbb{R}^+ \; ; \; \forall b\in \mathbb{R}^+ \; ; \; \sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a=b$.
- $\forall a\in \mathbb{R}^+ \; ; \; \forall b\in \mathbb{R}^+ ; \; \sqrt[n]{a}\le\sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a\le b$.

XVI. العمليات على الجذور من الرتبة n.

01. خاصيات:

$a\ge 0$ و $b\ge 0$ و n و m من $\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$.

- $\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\times b}$.
- $\sqrt[n]{\frac{1}{b}}=\frac{1}{\sqrt[n]{b}}$; $(b>0)$ و $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$; $(b>0)$
- $\sqrt[n\times m]{a^m}=\sqrt[n]{a}$ و $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[n\times m]{a}$.

02. مثال :

بسط: $\sqrt[5]{\sqrt[3]{81}}\times\sqrt[15]{3^{11}}$.

لدينا :

$$\begin{aligned}\sqrt[5]{\sqrt[3]{81}}\times\sqrt[15]{3^{11}} &= \sqrt[3\times 5]{81}\times\sqrt[15]{3^{11}}\\ &=\sqrt[15]{3^4\times 3^{11}}\\ &=\sqrt[15]{3^{15}}=3\end{aligned}$$

خلاصة : $\sqrt[5]{\sqrt[3]{81}}\times\sqrt[15]{3^{11}}=3$

XVII. بعض خاصيات الدوال التي هي على شكل: $g(x)=\sqrt[n]{f(x)}$.

01. خاصيات ☹ (تقبل)

f دالة عددية موجبة على مجال I. n من $\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$.

- إذا كانت $f(x)$ متصلة على I فإن $g(x)=\sqrt[n]{f(x)}$ متصلة على I.
- إذا كان $\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell$ و $\ell\ge 0$ فإن : $\lim_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\ell}$
- إذا كان $\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ فإن : $\lim_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)}=+\infty$.
- تبقى الخاصيات صحيحة إذا كان : $x\to\infty$; $x\to x_0^+$; $x\to x_0^-$

02. تمرين تطبيقي :

لنعتبر الدالة f المعرفة ب: $f(x)=\sqrt[4]{x+1}$.

1) حدد D_f مجموعة تعريف f.

2) أحسب: $f(0)$; $f(15)$; $f(-1)$

3) أحسب: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

XVIII. القوى الجذرية لعدد حقيقي موجب قطعا:

01. نشاط:

1) بين أن : $\left(3^2\right)^{\frac{1}{5}}=\left((3)^{\frac{1}{5}}\right)^2$.

جواب:

لدينا : $\left(3^2\right)^{\frac{1}{5}}=9^{\frac{1}{5}}=\sqrt[5]{9}$ و $\left((3)^{\frac{1}{5}}\right)^2=\left(\sqrt[5]{3}\right)^2=\sqrt[5]{3}\times\sqrt[5]{3}=\sqrt[5]{9}$ إذن $\left(3^2\right)^{\frac{1}{5}}=\left((3)^{\frac{1}{5}}\right)^2$

02. كتابة جديدة :

من خلال : $\left(3^2\right)^{\frac{1}{5}}=\left((3)^{\frac{1}{5}}\right)^2$ سنكتب: $\left(3^2\right)^{\frac{1}{5}}=\left((3)^{\frac{1}{5}}\right)^2=3^{\frac{2}{5}}$

03. خاصية :

ليكن $a\in\mathbb{R}^{+*}$ و $r\in\mathbb{Q}^*$.

إذا كان : $r=\frac{m}{n}=\frac{m'}{n'}$ مع n و n' من $\mathbb{N}^*$ و m و m' من $\mathbb{Z}$ فإن $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[n']{a^{m'}}$.

05. برهان :

لدينا :

$$\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{n'}=\sqrt[n]{a^{m\times n'}}$$
$$=\sqrt[n]{a^{m'\times n}}\ ;\ \left(\frac{m}{n}=\frac{m'}{n'}\right)$$
$$=a^{m'}$$

ومنه : $\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{n'}=a^{m'}$ إذن : $\sqrt[n']{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{n'}}=\sqrt[n']{a^{m'}}$ ومنه : $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[n']{a^{m'}}$

خلاصة : $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[n']{a^{m'}}$

04. تعريف :

$r=\frac{m}{n}\in\mathbb{Q}^*$ (مع $n\in\mathbb{N}^*$ و $m\in\mathbb{Z}$) و $x\in\mathbb{R}^{+*}$.

الكتابة $\sqrt[n]{x^m}$ نرمز لها ب : $\sqrt[n]{x^m}=x^{\frac{m}{n}}$ أو أيضا ب : $\sqrt[n]{x^m}=x^r$ أما x^r يسمى القوة الجذرية للعدد x ذات الأس r.

- $x^r=x^{\frac{m}{n}}=\left(\sqrt[n]{x}\right)^m=\sqrt[n]{x^m}$.

05. أمثلة :

1) مثال 1 : أكتب على شكل x^r ما يلي : $\left(\sqrt[9]{7}\right)^{11}$ و $\sqrt[8]{3^5}$ و $\left(\sqrt[9]{21}\right)^{-11}$ و $\sqrt[13]{2^{-15}}$ و $\left(\sqrt[5]{3}\right)^{-32}$.

2) مثال 2 : أكتب بطريقة أخرى الأعداد التالية: $\sqrt[4]{3^5};\sqrt[4]{3^{-5}};\sqrt{7^3};\sqrt[5]{11};\sqrt[3]{8}$.

06. ملاحظة:

- تعريف الأس في $\mathbb{Q}$ هو تمديد لتعريف الأس في $\mathbb{Z}$.
- لدينا : $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a^1}=\sqrt[n]{a}$: $\forall a>0 , \forall n\in\mathbb{N}^*$. بمأن : $\sqrt[n]{0}=0$ يمكن أن نصطلح أن : $0^{\frac{1}{n}}=0$.
- الدالة $f(x)=(x-2)^{\frac{1}{3}}$ هي معرفة على $D_f=]2,+\infty[$ يمكن تمديد الدالة f في $x_0=2$ بالدالة g في حيث

$$\begin{cases} g(x)=f(x)=(x-2)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{x-2} & ; x>2 \\ g(x)=0 \end{cases}.$$

07. خاصيات القوى الجذرية :

x و y من $\mathbb{R}^{+*}$ و r' و r من $\mathbb{Q}^*$. لدينا :

- $x^r > 0$
- $x^r=x^{r'} \Leftrightarrow r=r'$
- $x^r\times y^r=(x\times y)^r$ و $x^r\times x^{r'}=x^{r+r'}$
- $\frac{x^r}{x^{r'}}=x^{r-r'}$ و $(x^r)^{r'}=x^{r\times r'}$ و $x^{-r}=\frac{1}{x^r}$ و $\left(\frac{x}{y}\right)^r=\frac{x^r}{y^r}$

08. مثال: بسط ما يلي.

1) $A=\left(2^{-\frac{1}{3}}\right)^5\times\left(4^{-\frac{1}{2}}\right)\times\left(8^{\frac{2}{3}}\right)$.

2) $B=\frac{\sqrt[3]{7}\times 7^{\frac{2}{3}}}{7^{-\frac{1}{4}}}$.

$$A=\left(2^{-\frac{1}{3}}\right)^5\times\left(4^{-\frac{1}{2}}\right)\times\left(8^{\frac{2}{3}}\right)=(2)^{\frac{-5}{3}}\times(2^2)^{\frac{-1}{2}}\times(2^3)^{\frac{2}{3}}=(2)^{\frac{-5}{3}}\times(2^{-1})\times(2^2)=(2)^{\frac{-5}{3}-1+2}=2^{-\frac{2}{3}}$$

$$B=\frac{\sqrt[3]{7}\times 7^{\frac{2}{3}}}{7^{-\frac{1}{4}}}=\frac{7^{\frac{1}{3}}\times 7^{\frac{2}{3}}}{7^{\frac{-1}{4}}}=\frac{7^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}}{7^{\frac{-1}{4}}}=7^{1+\frac{1}{4}}=7^{\frac{5}{4}}$$