السنة 2 بكالوريا علوم رياضية	النهايات و الاتصال حل مقترح	سلسلة 4

تمرين 1 : $f(x)=\left(\sqrt{x+1}-1\right)^3$

1. لدينا : $x\in D_f \Leftrightarrow x+1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -1$ منه : $D_f=[-1;+\infty[$

2. ليكن $(x,y)\in[-1;+\infty[^2$ ، لدينا :

$$x>y \Rightarrow x+1>y+1\geq 0 \Rightarrow \sqrt{x+1}>\sqrt{y+1}$$
$$\Rightarrow \sqrt{x+1}-1>\sqrt{y+1}-1 \Rightarrow \left(\sqrt{x+1}-1\right)^3>\left(\sqrt{y+1}-1\right)^3$$
$$x>y \Rightarrow f(x)>f(y)$$

إذن f تزايدية قطعا على D_f

3. بما أن f متصلة و تزايدية قطعا على D_f

فهي تقابل من D_f نحو $J=f([-1;+\infty[)=\left[f(-1);\lim\limits_{x\to+\infty=} f(x)\right[=[-1;+\infty[$

4. ليكن $x\in[-1;+\infty[$ و $y\in[-1;+\infty[$ ، لدينا : $f^{-1}(x)=y \Rightarrow f(y)=x \Rightarrow \left(\sqrt{y+1}-1\right)^3=x$

إذا كان $x\in[0;+\infty[$ فإن :

$$f^{-1}(x)=y \Rightarrow \sqrt{y+1}-1=\sqrt[3]{x} \Rightarrow \sqrt{y+1}=\sqrt[3]{x}+1$$
$$\Rightarrow y+1=\left(\sqrt[3]{x}+1\right)^2 \Rightarrow y=\left(\sqrt[3]{x}+1\right)^2-1=\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}$$
$$\Rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}$$

إذا كان $x\in[-1;0[$ فإن :

$$f^{-1}(x)=y \Rightarrow \left(1-\sqrt{y+1}\right)^3=-x$$
$$\Rightarrow 1-\sqrt{y+1}=\sqrt[3]{-x} \Rightarrow \sqrt{y+1}=1-\sqrt[3]{-x}$$
$$\Rightarrow y+1=\left(1-\sqrt[3]{-x}\right)^2 \Rightarrow y=\left(1-\sqrt[3]{-x}\right)^2-1=\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{-x}$$
$$\Rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{-x}$$

بالتالي:

$$\begin{cases} f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{-x} \ ; \ x\in[-1;0[\\ f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x} \ ; \ x\in[0;+\infty[\end{cases}$$

يبدو سؤالا سهلا في البداية، إذ أن عدم الانتباه أن دالة الجذر المكعب معرفة على $[0;+\infty[$ سيجعلنا نتسرع في تحديد صيغة الدالة العكسية دون مراعاة مجال التعريف.

تمرين 2 : $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$

1. لدينا : $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}=\dfrac{x+1-1}{\sqrt{x+1}}=\sqrt{x+1}-\dfrac{1}{\sqrt{x+1}} \ : \ \forall x\in]-1;+\infty[$

2. ليكن $(x,y)\in[0;+\infty[^2$ ، لدينا :

$$x>y \Rightarrow \begin{cases}\sqrt{x+1}>\sqrt{y+1}>0\\ \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}<\dfrac{1}{\sqrt{y+1}}\end{cases} \Rightarrow \Rightarrow \begin{cases}\sqrt{x+1}>\sqrt{y+1}>0\\ -\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}>-\dfrac{1}{\sqrt{y+1}}\end{cases}$$
$$\Rightarrow \sqrt{x+1}-\frac{1}{\sqrt{x+1}}>\sqrt{y+1}-\frac{1}{\sqrt{y+1}}$$
$$x>y \Rightarrow f(x)>f(y)$$

إذن f تزايدية قطعا على $[0;+\infty[$ ، و بما أنها متصلة عليه

فهي إذن تقابل من $[0;+\infty[$ نحو $J=f([0;+\infty[)=\left[f(0);\lim\limits_{x\to+\infty=} f(x)\right[=[0;+\infty[$

3

ليكن $x \in [0;+\infty[$ و $y \in [0;+\infty[$ ، لدينا :

$$f^{-1}(x)=y \Rightarrow f(y)=x \Rightarrow \frac{y}{\sqrt{1+y}}=x$$
$$\Rightarrow y^2=x^2(y+1) \Rightarrow y^2-x^2y-x^2=0$$

محددة الحدودية $y^2-x^2y-x^2=0$ ذات المجهول y هي : $\Delta=x^4+4x^2 \geq 0$

إذن : $f^{-1}(x)=y \Rightarrow y=\frac{x^2+\sqrt{x^4+x^2}}{2} \ ou \ y=\frac{x^2-\sqrt{x^4+x^2}}{2}$

وبما أن : $\forall x \in [0;+\infty[\quad \frac{x^2+\sqrt{x^4+x^2}}{2} \geq 0$ فإن : $\forall x \in [0;+\infty[\quad f^{-1}(x)=\frac{x^2+\sqrt{x^4+x^2}}{2}$

لسنا مظطرين للبرهان ان $\frac{x^2-\sqrt{x^4+x^2}}{2} \notin [0;+\infty[\quad \forall x \in [0;+\infty[$ و السبب أننا نعلم مسبقا عن طريق الاتصال والرتابة وحدانية تعبير الدالة العكسية، لذلك أي تعبير سنجده يحقق الشروط سيكون تلقائيا هو التعبير المبحوث عنه والوحيد. لكننا في السنة الأولى بكالوريا لم نكن نكتفي بهذا الأمر والسبب أننا لم نكن نتوفر على خاصية تسمح مسبقا بضمان وجود الدالة العكسية.

تمرين 3 : احسب النهايات التالية :

$$\lim_{x\mapsto+\infty}\left(\sqrt[3]{8x^3-x+1}-x\right)=\lim_{x\mapsto+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3\left(8-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}-x\right)=\lim_{x\mapsto+\infty}x\left(\sqrt[3]{8-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}-1\right)=+\infty$$

$(+\infty\times(2-1))$

$$\lim_{x\mapsto 0}\left(\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}\right)=\lim_{x\mapsto 0}\frac{x+1-1}{x\left(\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2+\sqrt[3]{x+1}+1\right)}=\lim_{x\mapsto 0}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2+\sqrt[3]{x+1}+1}=\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\mapsto-2^-}\left(\frac{\sqrt[3]{x^2-4}}{x+2}\right)=\lim_{x\mapsto-2^-}\frac{\sqrt[3]{x^2-4}}{-(-x-2)}=\lim_{x\mapsto-2^-}\frac{\sqrt[3]{x^2-4}}{-\sqrt[3]{(-x-2)^3}}=\lim_{x\mapsto-2^-}-\sqrt[3]{\frac{(x-2)(x+2)}{-(x+2)^3}}=\lim_{x\mapsto-2^-}-\sqrt[3]{\frac{2-x}{(x+2)^2}}=-\infty$$

استعمال الخاصية $\sqrt[3]{a\times b}=\sqrt[3]{a}\times\sqrt[3]{b}$ ممكن لكن به مخاطرة حيث يجب أن يكون a و b موجبين، لكن $x^2-4=(x+2)(x-2)$ هو جداء عددين سالبين، لذلك يتوجب كتابتهما على شكل $x^2-4=(-x-2)(-x+2)$

تمرين 4 : أثبت المتساويات التالية :

لنبين أن : $\text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)+\text{Arctan}\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{\pi}{4}$ ، نضع : $a=\text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)+\text{Arctan}\left(\frac{2}{3}\right)$

لدينا ، $\begin{cases}0<\frac{1}{5}<1\\0<\frac{2}{3}<1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}0<\text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)<\frac{\pi}{4}\\0<\text{Arctan}\left(\frac{2}{3}\right)<\frac{\pi}{4}\end{cases} \Rightarrow 0<a<\frac{\pi}{2}$

و $\tan(a)=\frac{\tan\left(\text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)\right)+\tan\left(\text{Arctan}\left(\frac{2}{3}\right)\right)}{1-\tan\left(\text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)\right).\tan\left(\text{Arctan}\left(\frac{2}{3}\right)\right)}=\frac{\frac{1}{5}+\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{15}}=\frac{\frac{13}{15}}{\frac{13}{15}}=1$ ، إذن : $\begin{cases}\left(a,\frac{\pi}{4}\right)\in\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\\\tan(a)=\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=1\end{cases} \Rightarrow a=\frac{\pi}{4}$

لاحظ جيدا شروط البرهان على المتساوية، فلا يكفي البرهان أن $\tan(a)=\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$ بل يجب البرهان قبل ذلك أنهما ينتميان معا لمجال من الشكل : $\left]\frac{-\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ حيث تكون فيه دالة قوس الظل تقابلا.

لنبين أن : $\mathrm{Arctan}\left(\frac{3}{4}\right)+\mathrm{Arctan}\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{\pi}{2}$

لدينا : $\mathrm{Arctan}\left(\frac{3}{4}\right)+\mathrm{Arctan}\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \mathrm{Arctan}\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{\pi}{2}-\mathrm{Arctan}\left(\frac{4}{3}\right)$

نضع : $a=\mathrm{Arctan}\left(\frac{3}{4}\right)$ و $b=\frac{\pi}{2}-\mathrm{Arctan}\left(\frac{4}{3}\right)$

لدينا : $\frac{4}{3}>0 \Rightarrow 0<\mathrm{Arctan}\left(\frac{4}{3}\right)<\frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{2}<-\mathrm{Arctan}\left(\frac{4}{3}\right)<0 \Rightarrow 0<\frac{\pi}{2}-\mathrm{Arctan}\left(\frac{4}{3}\right)<\frac{\pi}{2}$

و أيضا : $0<\mathrm{Arctan}\left(\frac{3}{4}\right)<\frac{\pi}{2}$

ولدينا : $\tan(b)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\mathrm{Arctan}\left(\frac{4}{3}\right)\right)=\dfrac{1}{\tan\left(\mathrm{Arctan}\left(\frac{4}{3}\right)\right)}=\dfrac{1}{\frac{4}{3}}=\frac{3}{4}=\tan\left(\mathrm{Arctan}\left(\frac{3}{4}\right)\right)$

إذن : $\begin{cases}(a,b)\in\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[^2 \\ \tan(a)=\tan(b)\end{cases} \Rightarrow a=b$ ، و هذا ينهي البرهان

لم نكن مظطرين لحصر $\frac{4}{3}$ لأننا نعلم مسبقا أن : $\forall x\in IR \quad \frac{-\pi}{2}<\mathrm{Arctan}\,x<\frac{\pi}{2}$

لنبين أن : $\forall x<0 \quad \mathrm{Arctan}(x)+\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{-\pi}{2}$

لدينا : $\mathrm{Arctan}(x)+\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{-\pi}{2} \Leftrightarrow \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{-\pi}{2}-\mathrm{Arctan}(x)$

نضع : $a=\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$ و $b=\frac{-\pi}{2}-\mathrm{Arctan}(x)$

لدينا : $x<0 \Rightarrow \frac{-\pi}{2}<\mathrm{Arctan}(x)<0 \Rightarrow 0<-\mathrm{Arctan}\left(\frac{4}{3}\right)<\frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{2}<\frac{-\pi}{2}-\mathrm{Arctan}\left(\frac{4}{3}\right)<0$

و أيضا : $-\frac{\pi}{2}<\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)<0$ ، ولدينا :

$$\tan(b)=\tan\left(\frac{-\pi}{2}-\mathrm{Arctan}(x)\right)=\tan\left(\frac{-\pi}{2}+\pi-\mathrm{Arctan}(x)\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\mathrm{Arctan}(x)\right)=\frac{1}{\tan(\mathrm{Arctan}(x))}=\frac{1}{x}$$

إذن : $\begin{cases}(a,b)\in\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[^2 \\ \tan(a)=\tan(b)\end{cases} \Rightarrow a=b$ ، و هذا ينهي البرهان

استعملنا الخاصية : $\tan(x)=\tan(x+k\pi)\ /\ k\in Z$

تمرين 5 :

نرمز لمعادلة المقترحة ب: $(E):\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{2x-1}\right)+\mathrm{Arctan}(x)=\frac{\pi}{2}$ ، مجموعة صلاحيتها هي : $D=IR-\left\{\frac{1}{2}\right\}$

لدينا :

$(E)\Rightarrow \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{2x-1}\right)=\frac{\pi}{2}-\mathrm{Arctan}(x) \Rightarrow \tan\left(\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{2x-1}\right)\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\mathrm{Arctan}(x)\right)$

$(E) \Rightarrow \frac{1}{2x-1}=\frac{1}{\tan(\mathrm{Arctan}(x))}=\frac{1}{x} \Rightarrow 2x-1=x \Rightarrow x=1$

عكسيا يمكن التحقق بسهولة من أن 1 حل لهذه المعادلة ، بالتالي : $S=\{1\}$

ليس من الضروري البرهان أن $\frac{\pi}{2}-\mathrm{Arctan}(x)\in\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ و السبب أنه من خلال المعادلة التي هي معطاة يساوي تعبيرا نعلم

مسبقا أنه ينتمي لهذا المجال، فالأمر مختلف عن التمرين السابق لأننا لسنا بصدد البرهان على هذه المتساوية، بل نستعملها و نقوم باستنتاجات.

$$\text{Arctan}(2x)+\text{Arctan}(3x)=\frac{\pi}{4} \Rightarrow \tan(\text{Arctan}(2x)+\text{Arctan}(3x))=1$$

$$\Rightarrow \frac{2x+3x}{1-6x^2}=1 \Rightarrow 5x=1-6x^2$$

$$\Rightarrow 6x^2+5x-1=0$$

$$\Rightarrow x=-1 \ ou \ x=\frac{1}{6}$$

عكسيا نتحقق أن $\frac{1}{6}$ هو العدد الوحيد الذي يحقق هذه المعادلة (لأن: $\text{Arctan}(-2)+\text{Arctan}(-3)<0$ و $\text{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right)+\text{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{4}$ نبرهن عليها كما في السؤال الأول من التمرين السابق)

خلاصة: $S=\left\{\frac{1}{6}\right\}$

استعملنا المحددة لتحديد حلول المعادلة $6x^2+5x-1=0$

تمرين 6 : لنحسب النهاية التالية: $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} x(Arctg(2x)-Arctg(x))$

نضع: $t=\frac{1}{x}$ ، إذن:

$$\lim_{x\mapsto+\infty} x(\text{Arctan}(2x)-\text{Arctan}(x))=\lim_{\substack{t\mapsto0\\t>0}}\frac{\text{Arctan}\left(\frac{2}{t}\right)-\text{Arctan}\left(\frac{1}{t}\right)}{t}=\lim_{\substack{t\mapsto0\\t>0}}\frac{\frac{\pi}{2}-\text{Arctan}\left(\frac{t}{2}\right)-\frac{\pi}{2}+\text{Arctan}(t)}{t}$$

$$=\lim_{\substack{t\mapsto0\\t>0}}\frac{\text{Arctan}(t)-\text{Arctan}\left(\frac{t}{2}\right)}{t}=\lim_{\substack{t\mapsto0\\t>0}}\frac{\text{Arctan}(t)}{t}-\frac{\text{Arctan}\left(\frac{t}{2}\right)}{t}$$

$$=\lim_{\substack{t\mapsto0\\t>0}}\frac{\text{Arctan}(t)}{t}-\frac{1}{2}\frac{\text{Arctan}\left(\frac{t}{2}\right)}{\frac{t}{2}}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

استعملنا المتساوية : $\text{Arctan}(x)+\text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}$ $\forall x>0$ و التي يمكن استعمالها في حال لم تكن كسؤال فرعي مساعد، و أيضا النهاية الهامة : $\lim\limits_{x\mapsto0}\frac{\text{Arctan}(x)}{x}=1$ و التي يمكن البرهان عنها بسهولة باستعمال تغيير المتغير $\text{Arctan}(x)=t$