السنة 2 بكالوريا علوم رياضية	النهايات و الاتصال حل مقترح	سلسلة 2

تمرين 2 : $f(x)=\dfrac{3-x^2}{1+x^2}$

1) لدينا : $x\in D_f \Leftrightarrow x^2+1\neq 0$ منه : $D_f=IR$

لدينا : $x\in IR \Rightarrow -x\in IR$ و $f(-x)=\dfrac{3-(-x)^2}{1+(-x)^2}=\dfrac{3-x^2}{1+x^2}=f(x)$ $\forall x\in IR$ ، بالتالي f دالة زوجية.

2) لدينا : $\forall x\in Df \quad -1+\dfrac{4}{1+x^2}=\dfrac{-1-x^2+4}{1+x^2}=\dfrac{3-x^2}{1+x^2}=f(x)$

3) ليكن : $(a,b)\in[0;+\infty[^2$ ، لدينا :

$$a>b \Rightarrow a^2>b^2 \Rightarrow 1+a^2>1+b^2 \Rightarrow \frac{1}{1+a^2}<\frac{1}{1+b^2}$$
$$\Rightarrow \frac{4}{1+a^2}<\frac{4}{1+b^2} \Rightarrow -1+\frac{4}{1+a^2}<-1+\frac{4}{1+b^2} \Rightarrow f(a)<f(b)$$

إذن f تناقصية قطعا على $[0;+\infty[$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	-1 ↗	3	↘ -1

حساب النهايات في المحدات ليس مطلوبا لكنه مفيد في السؤال الموالي

4) لنحسب:

$$f([0;1])=[f(1),f(0)]=[1;3]$$

$$f(]2,3])=\left[f(3),\lim_{x\mapsto 2} f(x)\right[=\left[\frac{-3}{5};\frac{-1}{5}\right[$$

$$f(]-2,0[)=\left]\lim_{x\mapsto -2} f(x),\lim_{x\mapsto 0} f(x)\right[=\left]\frac{-1}{5},3\right[$$

$$f(]-\infty,-1[)=\left]\lim_{x\mapsto -\infty} f(x),\lim_{x\mapsto 1} f(x)\right[=]-1,1[$$

$$f(]1,+\infty[)=\left]\lim_{x\mapsto +\infty} f(x),\lim_{x\mapsto 1} f(x)\right[=]-1,1[$$

$$f([-3;2])=f([-3;0]\cup[0;2])=f([-3;0])\cup f([0;2])=[f(-3);f(0)]\cup[f(2);f(0)]$$
$$=\left[\frac{-3}{5};3\right]\cup\left[\frac{-1}{5};3\right]=\left[\frac{-3}{5};3\right]$$

تمرين 2 : $f(x)=x^3-3x+1$

الدالة f دالة حدودية ، فهي إذن قابلة للاشتقاق على IR

و لدينا: $\forall x\in IR \quad f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$

و بما أن: $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\mapsto+\infty} x^3=+\infty$ و $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\mapsto-\infty} x^3=-\infty$ فإن:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		+		-		+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	-1	↗	$+\infty$

إذن:

$$f([0;1[)=\left]\lim_{x\mapsto1} f(x),f(0)\right]=]-1,1]$$

$$f([1;+\infty[)=f([0,1]\cup[1;+\infty[)=f([0,1])\cup f([1;+\infty[)=[f(1),f(0)]\cup\left[f(1);\lim_{x\mapsto+\infty} f(x)\right[$$
$$=[-1,0]\cup[-1;+\infty[=[-1;+\infty[$$

$$f(]-\infty;0[)=f(]-\infty;-1]\cup[-1,0[)=f(]-\infty;-1])\cup f([-1,0[)=$$
$$=\left]\lim_{x\mapsto-\infty} f(x);f(-1)\right]\cup\left[\lim_{x\mapsto0} f(x),f(-1)\right[=]-\infty,3]\cup[1;3[=]-\infty,3]$$

لحساب صورة مجال بدالة متصلة، إذا كانت الدالة رتيبة على هذا المجال(تزايدية أو تناقصية) نطبق القواعد المعروفة و إذا كانت تغير رتابتها على هذا المجال فإننا نجعل هذا المجال على شكل اتحاد مجالات تكون في كل منها الدالة رتيبة و نطبق القاعدة في كل مجال على حدة.

تمرين 3 : f دالة متصلة على مجال $[a,b]$ حيث $f(x)>1 \quad \forall x\in[a,b]$

لنبين أن : $\exists\alpha>1 \ / \ \forall x\in[a,b] \quad f(x)\geq\alpha$

بما أن f متصلة على $[a,b]$ فإنه يوجد $(m,M)\in IR^2$ حيث : $f([a,b])=[m,M]$

إذن : $\forall x\in[a,b] \quad f(x)\geq m$

بما أن : $m\in f([a,b])$ فإنه يوجد $x_0\in[a,b]$ حيث : $f(x_0)=m$

إذن : و بما أن : $\forall x\in[a,b] \quad f(x)>1$ فإن : $f(x_0)>1$ منه : $m>1$

إذن: $\exists m>1 \ / \ \forall x\in[a,b] \quad f(x)\geq m$ ، و هذا ينهي البرهان.

الخاصية المستعملة في حل التمرين قليلة الاستعمال في التمارين لكنها مهمة حيث تعتبر اللبنة الأساسية في البرهان على كثير من الخصائص في الدوال يمكن تلخيصها في الجملة : صورة مجال مغلق بدالة متصلة هو مجال مغلق.

تمرين 4 :

نعتبر الدالة $f(x)=x^5+x^3-x^2+x+1$ ، f هي دالة حدودية إذن فهي متصلة على IR و بالأخص على المجال $[-1;0]$ ، و بما أن: $f(-1)=-3<0$ و $f(0)=1>0$ ، فحسب مبرهنة القيم الوسيطة $\exists c\in[-1;0] \quad f(c)=0$ ، أي أن المعادلة $x^5+x^3-x^2+x+1=0$ تقبل على الأقل حلا في $[-1;0]$.

نعتبر الدالة $f(x)=3\sin(x)+\cos^2(x)-x$ ، f هي عبارة عن تأليفة لدوال حدودية و مثلثية إذن فهي متصلة

على IR و بالأخص على المجال $[0;\pi]$ ، و بما أن: $f(0)=1>0$ و $f(\pi)=1-\pi<0$ ، فحسب مبرهنة القيم الوسيطة $\exists c\in[0;\pi]\ f(c)=0$ أي $\exists c\in[0;\pi]\ 3\sin(c)+\cos^2(c)-c=0$ أي $\exists c\in[0;\pi]\ 3\sin(c)+\cos^2(c)=c$ أي أن المعادلة $3\sin(x)+\cos^2(x)=x$ تقبل على الأقل حلا في $[0;\pi]$.	
نعتبر الدالة $f(x)=x^3+\frac{1}{x}-3$ ، f هي عبارة عن دالة جذرية إذن فهي متصلة على مجموعة تعريفها IR^* و بالأخص على المجال $[1;2]$ ، وبما أن: $f(1)=-1<0$ و $f(2)=\frac{11}{2}>0$ ، فحسب مبرهنة القيم الوسيطة $\exists c\in[1;2]\ f(c)=0$ ، وبما أن $c\in[1,2]\Rightarrow c\in[-2,2]$ فإن $\exists c\in[-2;2]\ f(c)=0$ أي أن المعادلة $x^3+\frac{1}{x}=3$ تقبل على الأقل حلا في $[-2;2]$.	
نعتبر الدالة: $f(x)=x^3+3x-10$ ، f هي دالة حدودية إذن فهي متصلة على IR وبالأخص على المجال $[0;2]$ ولدينا: $f(0)=-10<0$ و $f(2)=1>0$ ، إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطة فإن المعادلة: $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلا في $[0;2]$ بالتالي فهي تقبل على الأقل حلا في IR وبما أن: $f'(x)=3x^2+3>0$ $\forall x\in IR$ فإن f دالة تزايدية قطعا. بالتالي المعادلة: $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في IR.	
نعتبر الدالة: $f(x)=x^4+x-1$ الدالة f دالة حدودية فهي متصلة على IR منه فهي متصلة على $[-1;1]$ ولدينا: $f(1)=1>0$ و $f(-1)=-1<0$ إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطة فإن المعادلة: $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلا في $[-1;1]$ وهذا يعني مبيانيا أن C_f منحنى الدالة f يقطع محور الأفاصيل في المجال $[-1;1]$	
المعادلة $f(x)=g(x)$ تكافئ $f(x)-g(x)=0$ نعتبر الدالة: $h(x)=f(x)-g(x)=\sqrt{x+1}+x^3$ الدالة h عبارة عن جمع و مركب لدالة الجذر مربع و دوال حدودية فهي متصلة على $[-1;+\infty[$ منه فهي متصلة على $\left[\frac{-7}{8};\frac{-3}{4}\right]$ ، ولدينا: $h\left(\frac{-7}{8}\right)=\sqrt{\frac{-7}{8}+1}+\left(\frac{-7}{8}\right)^3=\sqrt{\frac{1}{8}}-\frac{343}{512}\approx -0{,}31<0$ و $h\left(\frac{-3}{4}\right)=\sqrt{\frac{-3}{4}+1}+\left(\frac{-3}{4}\right)^3=\sqrt{\frac{1}{4}}-\frac{27}{64}=\frac{1}{2}-\frac{27}{64}=\frac{32-27}{64}=\frac{5}{64}>0$ وبما أن: $h'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}+3x^2>0$ $\forall x\in]-1,+\infty[$ ، فإن h تزايدية قطعا على $\left[\frac{-7}{8};\frac{-3}{4}\right]$ إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطة فإن المعادلة: $h(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في $\left[\frac{-7}{8};\frac{-3}{4}\right]$	

وهذا يعني مبيانيا أن C_f و C_g يتقاطعان في نقطة وحيدة أفصولها α يحقق : $\frac{-7}{8} < \alpha < \frac{-3}{4}$

يجب الاحتياط أثناء استعما مبرهنة القيم الوسيطة حيث يجب التأكد من اتصال الدالة في المجال المطلوب أو البحث عن مجال ضمن المجال المطلوب يتحقق فيه الاتصال. وحدانية الحل مرتبطة برتابة الدالة في المجال المطلوب.

تمرين 5 : المعادلة $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ تكافئ $f(x) - \frac{1-x}{1+x} = 0$ ، نعتبر الدالة : $g(x) = f(x) - \frac{1-x}{1+x}$

الدالة g هي فرق الدالة المتصلة f و الدالة الجذرية $x \to \frac{1-x}{1+x}$ إذن فهي متصلة على $[0;1]$

ولدينا : $g(0) = f(0) - 1 = 0 - 1 = -1 < 0$ و $g(1) = f(1) - 0 = 1 - 0 = 1 > 0$

إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطة فإن المعادلة: $g(x) = 0$ تقبل على الأقل حلا في $]0;1[$

أي أن $\exists c \in]0;1[\quad : \quad f(c) = \frac{1-c}{1+c}$

صعوبة التمرين تكمن في اختيار الدالة و عدم خلطها بالدالة f المعطاة في التمرين، كما يجب الانتباه للمجال المطلوب (مجال مفتوح) مما يتطلب التحقق أن طرفي المجال لا يحققان المعادلة المطلوبة.

تمرين 6 : لتكن f دالة متصلة و موجبة على IR^+ حيث $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell$ و $\ell < 1$

لنبين أن المعادلـــة $f(x) = x$ تقبل على الأقل حلا في IR^+

لنبين أولا أن : $\exists c > 0 \;/\; f(c) < c$

من أجل ذلك نفترض العكس أي نفترض أن $f(x) \geq x \quad \forall x > 0$ منه : $\frac{f(x)}{x} \geq 1 \quad \forall x > 0$

وبما أن $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell$ فإننا نستنتج أن $\ell \geq 1$ و هذا يناقض المعطيات

إذن $\exists c > 0 \;/\; f(c) < c$ ، الآن نعتبر الدالة $g(x) = f(x) - x$

لدينا : $g(0) = f(0) \geq 0$ (f دالة موجبة) و $g(c) = f(c) - c < 0$

وبما أن g دالة متصلة على IR^+ (لأنها فرق دالتين متصلتين) و بالأخص على $[0;c]$) فحسب مبرهنة القيم الوسيطة

فإن المعادلـــة $g(x) = 0$ تقبل على الأقل حلا في $[0;c]$

بالتالي $f(x) = x$ تقبل على الأقل حلا في IR^+ (لأن $[0;c] \subset IR^+$)

يتطلب حل التمرين البرهان على وجود c يحقق الشرط $f(c) < c$ دون ضرورة تحديد قيمته، لأننا لا نتوفر على صيغة الدالة.