المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني
والتعليم العالي والبحث العلمي

ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ

المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة الاستدراكية 2019
- الموضوع -

RS24

المادة	الرياضيات	مدة الانجاز	4
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم الرياضية : (أ) و (ب)	المعامل	9

- مدة إنجاز الموضوع هي أربع ساعات.
- يتكون الموضوع من أربعة تمارين مستقلة فيما بينها.
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين 1 يتعلق بالأعداد العقدية..................................(3.5 ن)
- التمرين 2 يتعلق بالاحتمالات......................................(3 ن)
- التمرين 3 يتعلق بالبنيات الجبرية.............................(3.5 ن)
- التمرين 4 يتعلق بالتحليل...(10 ن)

لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة كيفما كان نوعها

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

التمرين 1: (3.5 نقطة)

ليكن α عددا عقديا غير منعدم.

I- نعتبر في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $(E_\alpha) \quad : \quad z^2 - i\alpha\sqrt{3}z - \alpha^2 = 0$

0.25 | 1- أ) تحقق أن مميز المعادلة (E_α) هو: $\Delta = \alpha^2$

0.5 | ب) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E_α)

0.5 | 2- علما أن $\alpha = |\alpha| e^{i\lambda}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$)، اكتب حلي المعادلة (E_α) على الشكل الأسي.

II- نفترض أن المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{u},\vec{v})$. نعتبر النقط Ω و M_1 و M_2 ذات الألحاق على التوالي α و $z_1 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\alpha$ و $z_2 = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\alpha$ و ليكن R الدوران الذي مركزه O و زاويته $\dfrac{\pi}{3}$.

0.5 | 1- أ) بين أن $R(\Omega) = M_1$ و أن $R(M_1) = M_2$

0.25 | ب) استنتج أن المثلثين $O\Omega M_1$ و OM_1M_2 متساويا الأضلاع.

0.25 | 2- أ) تحقق أن: $z_1 - z_2 = \alpha$

0.5 | ب) بين أن المستقيمين (ΩM_2) و (OM_1) متعامدان.

0.25 | ج) استنتج أن $O\Omega M_1 M_2$ معين.

0.5 | 3- بين أن لكل عدد حقيقي θ، العدد $Z = \dfrac{z_2-\alpha}{z_1-\alpha} \div \dfrac{z_2 - |\alpha| e^{i\theta}}{z_1 - |\alpha| e^{i\theta}}$ حقيقي.

التمرين 2: (3 نقط)

يحتوي كيس على n كرة مرقمة من 1 إلى n $(n \in \mathbb{N}^*, n \geq 3)$. نسحب، الواحدة تلو الأخرى و بدون إحلال، جميع الكرات من هذا الكيس. لا يمكن التمييز بين الكرات باللمس.

1 | 1- ما هو احتمال الحصول على الكرات 1 و 2 و 3 بالتتابع و في هذا الترتيب؟

1 | 2- ما هو احتمال الحصول على الكرات 1 و 2 و 3 في هذا الترتيب (سواء كانت متتابعة أم غير متتابعة)؟

1 | 3- نعتبر المتغير العشوائي X_n الذي يساوي العدد الضروري من السحبات للحصول على الكرات 1 و 2 و 3. حدد قانون احتمال المتغير X_n.

التمرين 3: (3.5 نقطة)

نعتبر الفضاء المتجهي $(V_2,+,.)$ الذي بعده 2.

ليكن $(\vec{i},\vec{j})$ أساسا للفضاء V_2. نضع: $\vec{e_1}=\frac{1}{2}\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}$ و $\vec{e_2}=\frac{1}{2}\vec{i}-\frac{1}{2}\vec{j}$

ليكن $*$ قانون التركيب الداخلي المعرف في V_2 بما يلي:

$$\forall(x,y,x',y')\in\mathbb{R}^4\quad (x\vec{i}+y\vec{j})*(x'\vec{i}+y'\vec{j})=(xx'+yy')\vec{i}+(xy'+yx')\vec{j}$$

1- أ) بين أن $(\vec{e_1},\vec{e_2})$ أساس للفضاء V_2 — 0.25

ب) تحقق أن: $\vec{e_1}*\vec{e_1}=\vec{e_1}$ و $\vec{e_2}*\vec{e_2}=\vec{e_2}$ و $\vec{e_1}*\vec{e_2}=\vec{e_2}*\vec{e_1}=\vec{0}$ — 0.25

ج) بين أن: $\forall(X,X',Y,Y')\in\mathbb{R}^4\quad (X\vec{e_1}+Y\vec{e_2})*(X'\vec{e_1}+Y'\vec{e_2})=XX'\vec{e_1}+YY'\vec{e_2}$ — 0.25

2- أ) بين أن القانون $*$ تبادلي. — 0.25

ب) بين أن القانون $*$ تجميعي. — 0.25

ج) بين أن القانون $*$ يقبل عنصرا محايدا. — 0.25

د) بين أن $(V_2,+,*)$ حلقة تبادلية واحدية. — 0.25

3- ليكن $\vec{u}\in V_2-\{\vec{0}\}$. نعتبر: $E_{\vec{u}}=\{\lambda\vec{u}\,/\,\lambda\in\mathbb{R}\}$

أ) بين أن $(E_{\vec{u}},+)$ زمرة جزئية للزمرة $(V_2,+)$ — 0.25

ب) بين أن $(E_{\vec{u}},+,.)$ فضاء متجهي جزئي للفضاء $(V_2,+,.)$ — 0.25

ج) بين أن: $E_{\vec{u}}$ مستقر بالنسبة للقانون $*$ $\Leftrightarrow$ الأسرة $(\vec{u}*\vec{u},\vec{u})$ مقيدة. — 0.5

4- نفترض أن: $\vec{u}*\vec{u}=\alpha\vec{u}\quad;\quad(\exists\alpha\in\mathbb{R}^*)$. نعتبر التطبيق

$$\varphi:\quad \mathbb{R}^*\longrightarrow E_{\vec{u}}$$
$$x\longmapsto \frac{x}{\alpha}\vec{u}$$

أ) بين أن φ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحو $(E_{\vec{u}},*)$ — 0.5

ب) بين أن $(E_{\vec{u}},+,*)$ جسم تبادلي. — 0.25

التمرين 4: (10 نقط)

الجزء I : نعتبر الدالة g المعرفة على $I=]-1,+\infty[$ بما يلي: $g(x)=1+x^2-2x(1+x)\ln(1+x)$

1- أ) بين أن: $\lim\limits_{x\to-1^+}g(x)=2$ — 0.25

ب) بين أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$ — 0.5

2- بين أن g قابلة للاشتقاق على I ، و أن: $g'(x)=-2(1+2x)\ln(1+x)$ $\quad(\forall x\in I)$ 0.5

3- نعطي جدول تغيرات الدالة g:

x	-1		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	2	$\searrow$	$\frac{5}{4}-\frac{\ln 2}{2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

أ) بين أنه يوجد عدد حقيقي موجب قطعا وحيد α بحيث: $g(\alpha)=0$ 0.5

ب) تحقق أن: $\alpha<1$ (نأخذ: $\ln 2=0.7$) 0.25

ج) استنتج أن : $0<g(x)$ $\quad(\forall x\in]-1,\alpha[)$ و أن: $g(x)<0$ $\quad(\forall x\in]\alpha,+\infty[)$ 0.5

الجزء II : نعتبر الدالة f المعرفة على $I=]-1,+\infty[$ بما يلي: $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{1+x^2}$

ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i},\vec{j})$

1- أ) احسب $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ ثم أول مبيانيا النتيجة المحصل عليها. 0.5

ب) احسب $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ ثم أول مبيانيا النتيجة المحصل عليها. 0.5

2- أ) بين أن f قابلة للاشتقاق على I و أن $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(1+x)(1+x^2)^2}$ $\quad(\forall x\in I)$ 0.75

ب) اعط جدول تغيرات الدالة f على I 0.5

ج) تحقق أن: $f(\alpha)=\dfrac{1}{2\alpha(1+\alpha)}$ و أن: $f(x)\leq\dfrac{1}{2\alpha(1+\alpha)}$ $\quad(\forall x\in I)$ 0.75

3- أ) حدد معادلة المماس (T) للمنحنى (C) في النقطة ذات الأفصول 0. 0.25

ب) بين أن: $\ln(1+x)<x$ $\quad(\forall x>0)$ 0.5

ج) استنتج أن: $f(x)<x$ $\quad(\forall x>0)$ 0.25

د) مثل مبيانيا (T) و (C).(نأخذ: $\alpha=0.8$ و $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2cm$) 1

الجزء III : نضع $J=\int_0^1 f(x)\,dx$

1 -1 أ) باستعمال تغيير المتغير: $t=\frac{1-x}{1+x}$ ، بين أن: $J=\frac{\pi}{8}\ln 2$

0.5 ب) حدد، بالسنتمر مربع، مساحة الحيز المستوي المحصور بين المنحنى (C) و المستقيمات (T) و $x=0$ و $x=1$

1 -2 باستعمال طريقة المكاملة بالأجزاء، احسب: $K=\int_0^1 \frac{\arctan(x)}{1+x}\,dx$

انتهى