المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني والتعليم العالي والبحث العلمي
الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين جهة الدار البيضاء - سطات

الشعبة أو المسلك : علوم رياضية أ المستوى 2Bac

J 2149

امتحان نيل شهادة البكالوريا

مادة : الرياضيات

532511

النقطة النهائية	على
20,00	20
عشرون نقطة	بالحروف

التقدير المفسر للنقطة

خاص بكتابة الإمتحان

اسم المصحح(ة) و توقيعه(ها)

البنيات الجبرية :

1 - لدينا $M(1,0)=I\in E$ إذن E مجموعة غير فارغة
و لأنها $E\subset M_2(\mathbb{R})$ مجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة 2.

- ليكن x و y و a و b عناصر من $\mathbb{R}$

$$M(x,y)-M(a,b)=\begin{pmatrix} x & -2y \\ y & x+2y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a & -2b \\ b & a+2b\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} x-a & -2y+2b \\ y-b & x-a+2y-2b\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} x-a & -2(y-b) \\ y-b & a-x+2(y-b)\end{pmatrix}$$

0,25

$$=M(x-a;y-b)\in E$$

لأن $y-b$ و $x-a$ عنصرين من $\mathbb{R}$

إذن E زمرة جزئية للزمرة $(M_2(\mathbb{R}),+)$

2 - أ - لدينا E جزء غير فارغ من $M_2(\mathbb{R})$

ليكن a و b و x و y و α من $\mathbb{R}$

$$M(a,b)+M(x,y)=\begin{pmatrix} a & -2b \\ b & a+2b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x & -2y \\ y & x+2y\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a+x & -2b-2y \\ b+y & x+a+2b+2y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+x & -2(b+y) \\ b+y & x+a+2(b+y)\end{pmatrix}$$

$$M(a,b)+M(x,y)=M(a+x,b+y)\in E$$

لأن $a+x$ و $b+y$ عنصرين من $\mathbb{R}$

تنبيه : يمنع على المترشح أن يمضي ورقته أو يجعل أية علامة يمكنها أن تبين أصله

$$\alpha \cdot M(a,b) = \alpha \cdot \begin{pmatrix} a & -2b \\ b & a+2b \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha a & -2\alpha b \\ \alpha b & \alpha(a+2b) \end{pmatrix}$$

0,25

$$\underline{\alpha \cdot M(a,b)} = \begin{pmatrix} \alpha a & -2\alpha b \\ \alpha b & \alpha a + 2\alpha b \end{pmatrix} \underline{= M(\alpha a, \alpha b) \in E}$$

لأن αa و αb عنصرين من $\mathbb{R}$

إذن E فضاء متجهي جزئي للفضاء المتجهي $(M_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$

ب - لنبين أن (I,J) أسرة مولدة للفضاء المتجهي $(E,+,\cdot)$

$I = M(1,0) \in E$ و $J = M(0,1) \in E$

ليكن x و y من $\mathbb{R}$

$$M(x,y) = \begin{pmatrix} x & -2y \\ y & x+2y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2y \\ y & 2y \end{pmatrix}$$

$$= x \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= x \cdot M(1,0) + y \cdot M(0,1)$$

0,5

$$\underline{M(x,y) = x \cdot I + y \cdot J}$$

إذن (I,J) أسرة مولدة للفضاء المتجهي $(E,+,\cdot)$

لنبين أن (I,J) أسرة حرة

ليكن x و y عنصرين من $\mathbb{R}$

لدينا: $x \cdot I + y \cdot J = M(0,0)$

أي

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2y \\ y & 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

تتمة البنيات الجبرية :

4 - أ - لدينا :

$\varphi((x+iy)(a+ib)) = M(xa-yb+bx+ya\,;\,-bx-ya)$

$\varphi(a+ib)\times\varphi(x+iy) = M(a+b,-b)\times M(x+y,-y)$ ②

ولدينا مما سبق أن :

$M(x,y)\times M(a,b) = M(xa-2yb\,;\,xb+ya+2yb)$

أي :

$M(a+b\,;-b)\times M(x+y\,;-y) = M((x+y)(a+b)-2by\,;\,-y(a+b)-b(x+y)+2yb)$

$= M(xa+ya+xb+yb-2by\,;\,-ya-yb-bx-by+2yb)$

$= M(xa-by+bx+ya\,;\,-ya-bx)$ ①

(0,5)

إذن من ① و ② نستنتج أن :

$\varphi(a+ib)\times\varphi(x+iy) = M(xa-yb+bx+ya\,;\,-bx-ya)$

إذن :

$\varphi((x+iy)(a+ib)) = \varphi(a+ib)\times\varphi(x+iy)$

ومنه فإن φ تشاكل من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(M_2(\mathbb{R}),\times)$

ب - لنبين أن : $\varphi(\mathbb{C}^*)\subset E^*$

ليكن $x+iy$ من $\mathbb{C}^*$

أي $(x,y)\neq(0,0)$ ولدينا : $\varphi(x+iy) = M(x+y,-y)$

ومنه $(x+y,-y)\neq(0,0)$ أي $M(x+y,-y)\neq M(0,0)$

إذن $M(x+y,-y)\in E-\{0\}$

أي $M(x+y,y)\in E^*$ ومنه $\varphi(x+iy)\in E^*$

إذن $\varphi(\mathbb{C}^*)\subset E^*$

لنبين أن $E^*\subset\varphi(\mathbb{C}^*)$

ليكن $M(a,b)$ من E^*

أي $(a,b)\neq(0,0)$

ومنه $(a+b,-b) \neq (0,0)$

إذن $(a+b) - ib \in \mathbb{C}^*$

إذن $\varphi(a+b-ib) \in \mathbb{C}^*$

أي $M(a+b-b, +b) \in \varphi(\mathbb{C}^*)$

أي $M(a,b) \in \varphi(\mathbb{C}^*)$

إذن $E^* \subset \varphi(\mathbb{C}^*)$

إذن $\varphi(\mathbb{C}^*) = E^*$

0,5

ج- بما أن φ تشاكل من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(M_2(\mathbb{R}),\times)$

و $(\mathbb{C}^*,\times)$ زمرة تبادلية

فإن $(\varphi(\mathbb{C}^*),\times)$ زمرة تبادلية

ولدينا $E^* = \varphi(\mathbb{C}^*)$

إذن $(E^*,\times)$ زمرة تبادلية

0,25

د- لدينا: $(E,+)$ زمرة تبادلية

و الضرب توزيعي بالنسبة للجمع في E حسب 3-

و $(E^*,\times)$ زمرة تبادلية $M(0,0)=0$ هو العنصر

المحايد في $(E,+)$

إذن $(E,+,\times)$ جسم تبادلي.

0,25

~~الحسابيات:~~

~~1- ليكن n عدد صحيح نسبي و p عدد أولي~~

~~لدينا $n^2 \equiv 1 [p]$~~

~~نضع $n \wedge p = d$~~

~~d يساوي p أو 1 لأن p أولي~~

~~نفترض أن $d = p$~~

~~أي p / n~~

~~ومنه p / n^2~~

~~وهذا تناقض لأن $n^2 \equiv 1 [p]$~~

~~ومنه p و n أوليين فيما بينهما~~

~~وبما أن p أولي موجب: $k > 0$ و $p = 3+4k$~~

~~فإن حسب مبرهنة فيرما الصغرى: $n^{p-1} \equiv 1 [p]$~~

~~ومنه $n^{p-5} \times n^4 \equiv 1 [p]$; $(p > 5)$ (1)~~

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني والتعليم العالي والبحث العلمي
الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين
جهة الدار البيضاء - سطات

الشعبة أو المسلك : SMA المستوى

امتحان نيل شهادة البكالوريا

مادة : MAT

التقدير المفسر للنقطة

النقطة النهائية	على 20
	بالحروف

خاص بكتابة الإمتحان

اسم المصحح(ة) و توقيعه(ها)

التمرين 4 : التحليل :

1) أ- ليكن x من $]0,+\infty[$

$$\int_0^x \frac{t}{1+t}dt = \int_0^x \left(\frac{t+1}{1+t} - \frac{1}{1+t}\right)dt$$

$$= \int_0^x \left(1 - \frac{1}{1+t}\right)dt = \left[t - \ln(1+t)\right]_0^x$$

$$= x - \ln(1+x) - \ln(1)$$

0,5

إذن $\int_0^x \frac{t}{1+t}dt = x - \ln(1+x)$

ب- ليكن x من $]0,+\infty[$ ، لدينا $u = t^2$

لدينا : $t = x \Longrightarrow u = x^2$

و $t = 0 \Longrightarrow u = 0$

ولدينا $u = t^2 \Longrightarrow t = \sqrt{u}$

أي $du = 2t\,dt$

0,8

ومنه $dt = \frac{du}{2t}$

إذن $\int_0^x \frac{t}{1+t}dt = \int_0^{x^2} \frac{\sqrt{u}}{1+\sqrt{u}} \times \frac{1}{2\sqrt{u}} \times du$

إذن $\int_0^x \frac{t}{1+t}dt = \frac{1}{2}\int_0^{x^2} \frac{1}{1+\sqrt{u}}du$

ج- لدينا $\int_0^x \frac{t}{1+t}dt = \frac{1}{2}\int_0^{x^2} \frac{1}{1+\sqrt{u}}du$

و $\int_0^x \frac{t}{1+t}dt = x - \ln(1+x)$

أي $x - \ln(1+x) = \frac{1}{2}\int_0^{x^2} \frac{1}{1+\sqrt{u}}du$

تنبيه : يمنع على المترشح أن يمضي ورقته أو يجعل أية علامة يمكنها أن تبين أصله

ولدينا $0 \leq u \leq x^2$ أي $0 \leq \sqrt{u} \leq x$

ومنه $1 \leq \sqrt{u}+1 \leq x+1$

أي $\dfrac{1}{x+1} \leq \dfrac{1}{\sqrt{u}+1} \leq 1$

بما أن الدالة $u \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{u}+1}$ متصلة على $[0,+\infty[$

فبالمرور إلى التكامل نحصل على : $(x>0)$

$$\frac{1}{2}\times\int_0^{x^2}\frac{1}{x+1}\,du \leq \frac{1}{2}\int_0^{x^2}\frac{1}{\sqrt{u}+1}\,du \leq \frac{1}{2}\int_0^{x^2}du$$

ومنه $\dfrac{1}{2(x+1)}\displaystyle\int_0^{x^2}du \leq x-\ln(x+1) \leq \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{x^2}du$

أي $\dfrac{x^2}{2(x+1)} \leq x-\ln(x+1) \leq \dfrac{x^2}{2}$ 0,5

وبما أن $\dfrac{1}{x^2} > 0$

فإن $\boxed{\dfrac{1}{2(x+1)} \leq \dfrac{x-\ln(x+1)}{x^2} \leq \dfrac{1}{2}}$

2 - لدينا : $(\forall x \in]0,+\infty[)\ \dfrac{1}{2(1+x)} \leq \dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2} \leq \dfrac{1}{2}$

و $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{2(1+x)} = \dfrac{1}{2}$

و $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$ 0,25

إذن $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

الجزء : II

1) أ - الاتصال على اليمين في 0 :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x+1}{x}\right)\ln(1+x)$$
$$= \lim_{x\to 0^+}(x+1)\times\frac{\ln(1+x)}{x}$$
$$= 1\times 1 = 1 = f(0)$$ 0,25

الشعبة أو المسلك : SM A .... المستوى ....

امتحان نيل شهادة البكالوريا

مادة : MAT

التقدير المفسر للنقطة

النقطة النهائية	على 20
....	بالحروف

خاص بكتابة الإمتحان

اسم المصحح(ة) و توقيعه(ها) ....

تتمة تمرين 4 التحليل، الجزء II

ب - (تتمة) لدينا $(\forall x \in]0,+\infty[)\ f'(x) > 0$

(البرهنة في الورقة السابقة) 0,25

ومنه f تزايدية قطعا على $[0,+\infty[$

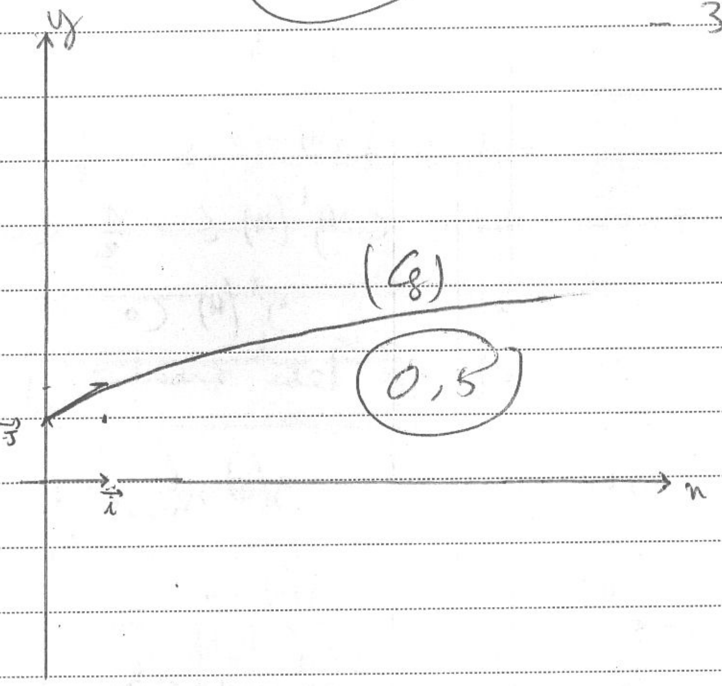
ج- نعلم أن f تزايدية قطعا،

$f([0,+\infty[) = [f(0), \lim_{x\to+\infty} f(x)[$

ونعلم أن $f(0) = 1$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

إذن $f([0,+\infty[) = [1,+\infty[$ 0,25

3 -



الجزء III

1 - أ - لدينا حسب I - ج ، لكل x من $]0,+\infty[$

$$\frac{1}{2(1+x)} \leq \frac{x-\ln(1+x)}{x^2} \leq \frac{1}{2}$$

و $f'(x) = \frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$

و $x>0$ أي $\frac{1}{2(1+x)} > 0$

0,5

ومنه $0 < f'(x) \leq \frac{1}{2}$

إذن $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$ ، $(\forall x \in]0,+\infty[)$

ب - ليكن x من $]0,+\infty[$

لدينا $g(x) = f(x) - x$ وبما أن f قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و الدالة $x \mapsto -x$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ فإن g قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$

فإنه $g'(x) = f'(x) - 1$

ولدينا $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$

ومنه $-1 \leq f'(x) - 1 \leq -\frac{1}{2}$

0,25

أي $-1 \leq g'(x) \leq -\frac{1}{2} < 0$

ومنه $g'(x) < 0$

إذن g تناقصية قطعا على $]0,+\infty[$.

ومنه $g(]0,+\infty[) =]\lim_{x\to+\infty} g(x), \lim_{x\to 0^+} g(x)[$

لدينا $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) - x$

0,25

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - 1\right) \times x = -\infty$

لأن $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ حسب II - 1 - ج

و $\lim_{x\to+\infty} -1 \times x = -\infty$

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني والتعليم العالي والبحث العلمي
الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين
جهة الدار البيضاء - سطات

الشعبة أو المسلك : SM A .... المستوى ....

امتحان نيل شهادة البكالوريا

مـادة : MAT

النقطة النهائية	على 20
	بالحروف

التقدير المفسر للنقطة

خاص بكتابة الإمتحان

اسم المصحح(ة) و توقيعه(ها) ....

تتمة التمرين 4 - التحليل : III - 2 - ج - تتمة الترجع

لدينا : $\frac{1}{2}|u_n-\alpha| \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}|a-\alpha|$ (1)

و $|u_{n+1}-\alpha| \le \frac{1}{2}|u_n-\alpha|$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن :

$|u_{n+1}-\alpha| \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}|a-\alpha|$

0,25

إذن حسب مبدأ الترجع :

$(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ |u_n-\alpha| \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n}|a-\alpha|$

د- لدينا : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ |u_n-\alpha| \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n}|a-\alpha|$

و $0<\frac{1}{2}<1$

أي $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}=0$

إذن $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}|a-\alpha|=0$

لأن $|a-\alpha|$ عدد حقيقي موجب

0,25

إذن حسب مصاديق التقارب

$$\begin{cases} |u_n-\alpha| \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n}|a-\alpha| \\ \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}|a-\alpha|=0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}u_n=\alpha$$

إذن المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ تؤول إلى α

التمرين 3 : $F(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$, $D_F = \mathbb{R}$

1 - الدالة $t \xrightarrow{g} e^{t^2}$ متصلة على $\mathbb{R}$ لأن $t \xrightarrow{u} t^2$

متصلة على $\mathbb{R}$ و $u(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$ و $x \mapsto e^x$ متصلة على $\mathbb{R}$

ومنه فإن g تقبل دالة أصلية φ على $\mathbb{R}$

و $F(x) = \varphi(x) - \varphi(0)$

$\varphi(0)$ ثابتة

و الدالة φ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ (لأنها هي أصلية g)

ومنه F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

إذن ف F متصلة على $\mathbb{R}$

و $F'(x) = \varphi'(x)$

$= g(x)$ (لأن φ هي أصلية g)

$F'(x) = e^{x^2} > 0$

0,25

لأن الدالة $x \mapsto e^x$ موجبة مهما يكن x من $\mathbb{R}$

إذن F تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$

2 - أ - ليكن x من $]0, +\infty[$

لدينا $0 \leq t \leq x$ لأن $x > 0$

ومنه $0 \leq t^2 \leq x^2$

أي $1 \leq e^{t^2} \leq e^{x^2}$ (الدالة $x \mapsto e^x$ تزايدية ومتصلة على $\mathbb{R}$)

ومنه: $\int_0^x dt \leq \int_0^x e^{t^2} dt \leq \int_0^x e^{x^2} dt$ بالمرور إلى التكامل نحصل (لأن $x>0$) على:

$\boxed{x \leq F(x)} \leq e^{x^2} \int_0^x dt$

0,5

إذن $\forall x \in]0, +\infty[\quad x \leq F(x)$

وبما أن $\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$

فإن $\lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$

ب - ليكن x من $\mathbb{R}$

نعلم أن $(\forall x \in \mathbb{R}) : -x \in \mathbb{R}$

إذن D_F متماثلة بالنسبة للصفر.

$F(-x) = \int_0^{-x} e^{t^2} dt$

نضع $u = -t$

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني والتعليم العالي والبحث العلمي
الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين جهة الدار البيضاء - سطات

الشعبة أو المسلك : SM A المستوى

امتحان نيل شهادة البكالوريا

مادة : MAT

التقدير المفسر للنقطة

خاص بكتابة الإمتحان

النقطة النهائية	على 20
	بالحروف

اسم المصحح(ة) و توقيعه(ها)

الأعداد العقدية (تتمة)

I _ 2

$(E_m) = \{-1-i ; -im-1+i\}$

إذا كان $m = i\sqrt{2}$

فإن حلي المعادلة هما $z_1 = -1-i$ و $z_2 = -i\sqrt{2}-1+i$

* $z_1 = -1-i = -\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$
$= \sqrt{2}\,e^{i(\frac{\pi}{4}+\pi)}$

$\boxed{z_1 = \sqrt{2}\,e^{i\frac{5\pi}{4}}}$

0,5

* $z_2 = -i\sqrt{2}-1+i$
$= -\sqrt{2}i - \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}} - \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$
$= -\sqrt{2}\left(e^{i\frac{\pi}{2}} + e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)$
$= \sqrt{2}\,e^{i\pi} \times e^{i\frac{\pi}{8}}\left(e^{i\frac{3\pi}{8}} + e^{-i\frac{3\pi}{8}}\right)$
$= \sqrt{2} \times 2\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) \times e^{i\pi} \times e^{i\frac{\pi}{8}}$

$\left(\cos\frac{\pi}{8} > 0\right)$

$\boxed{z_2 = 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)\,e^{i\frac{9\pi}{8}}}$

II 1 - أ - الصيغة العقدية للدوران R هو $z' = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z-c)+c$

حيث c لحق مركزه

ونعلم أن مركز الدوران يكون نقطة صامدة بالدوران

لنتحقق من أن $\Omega(w)$ نقطة صامدة بالدوران R:

0,25

$-iw - 1 + i = -i \times i - 1 + i$
$= \cancel{1} - \cancel{1} + i = i = w$ ✓

إذن w نقطة صامدة بالدوران R إذن فهو مركز الدوران.

$$a = e^{-i\frac{\pi}{2}}(b-w)+w$$

$$\Leftrightarrow \quad a-w = -i(b-w)$$

$$\Leftrightarrow \quad b-w = -\frac{1}{i}(a-w)$$

$$\Leftrightarrow \quad b = w + i(a-w)$$

$$\Leftrightarrow \quad b = i + i(-1-i-i)$$

$$\Leftrightarrow \quad b = i - i + 2$$

$$\Leftrightarrow \quad b = 2$$

لدينا : $A = R(B) \Leftrightarrow a = e^{-i\frac{\pi}{2}}(b-w)+w$

$$\Leftrightarrow \quad w-a = -e^{-i\frac{\pi}{2}}(b-w)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{w-a}{b-w} = -e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{w-a}{w-b} = e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

ولدينا $M' = R(M)$

أي $m' = e^{-i\frac{\pi}{2}}(m-w)+w$

ومنه $m'-a = e^{-i\frac{\pi}{2}}(m-w)+w-a$

أي $m'-a = e^{-i\frac{\pi}{2}}(m-w) - e^{-i\frac{\pi}{2}}(b-w)$

إذن $m'-a = \frac{w-a}{w-b}(m-w) - \frac{w-a}{w-b}(b-w)$

$$= \frac{w-a}{w-b}(m-w-b+w)$$

إذن $m'-a = \frac{w-a}{w-b}(m-b)$

A و M و Ω و B متداورة $\Leftrightarrow \overline{(\overrightarrow{\Omega B};\overrightarrow{\Omega A})} \equiv \overline{(\overrightarrow{MB};\overrightarrow{MA})}[\pi]$

$$\Leftrightarrow \quad \operatorname{Arg}\left(\frac{a-w}{b-w}\right) \equiv \operatorname{Arg}\left(\frac{a-m}{b-m}\right)[\pi]$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{Arg}\left(\frac{a-w}{b-w}\right)-\operatorname{Arg}\left(\frac{a-m}{b-m}\right)\equiv 0\,[\pi]$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{Arg}\left(\frac{w-a}{w-b}\right)-\operatorname{Arg}\left(\frac{m-a}{m-b}\right)\equiv 0\,[\pi]$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{Arg}\left(\frac{w-a}{w-b}\times\frac{m-b}{m-a}\right)\equiv 0\,[\pi]$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{Arg}\left(\frac{w-a}{w-b}\times(m-b)\times\frac{1}{m-a}\right)\equiv 0\,[\pi]$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{Arg}\left(\frac{m'-a}{m-a}\right)\equiv 0\,[\pi]$$

0,5

$$\Leftrightarrow \frac{m'-a}{m-a}\in\mathbb{R}$$

$\Leftrightarrow$ A و M و M' مستقيمية

إذن

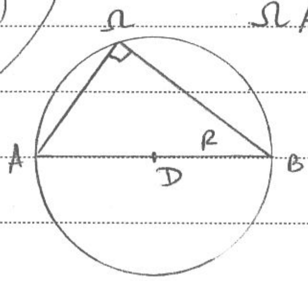
A و M و Ω و B متداورة $\Leftrightarrow$ A و M و M' مستقيمية

ج-

A و M' و M مستقيمية $\Leftrightarrow$ A و M و Ω و B متداورة

$\Leftrightarrow$ M تنتمي إلى الدائرة المحيطة بالمثلث $A\Omega B$ ✓

0,5



ولدينا $A=R(B)$ أي $\Omega A=\Omega B$

و $(\Omega A)\perp(\Omega B)$

إذن ف $[AB]$ قطر للدائرة.

ومنه مركز الدائرة هو منتصف $[AB]$

$$z_D=\frac{a+b}{2}=\frac{-1-i+2}{2}$$

لحق الشعاع $\boxed{z_D=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i}$ ✓

R شعاع هذه الدائرة: $R=|D-\Omega|=\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i-i\right|$

$$\boxed{R}=\left|\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i\right|=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{9}{4}}=\boxed{\frac{\sqrt{10}}{2}}$$ ✓

ب) $t=-x \Rightarrow u=x$

و $t=0 \Rightarrow u=0$

و $du=-dt \Rightarrow dt=-du$

إذن: حسب تغيير المتغير:

$F(-x)=\int_0^{-x} e^{t^2}dt = -\int_0^{x} e^{u^2}du$

$F(-x)=-F(x)$

إذن F دالة فردية

0,5

بما أن الدالة فردية

و $\lim_{x\to+\infty} F(x)$

فإنه نضع $t=-x$

$\lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{t\to+\infty} F(-t)$

لأن F فردية $= \lim_{t\to+\infty} -F(t)$

إذن $\lim_{x\to-\infty} F(x) = -\infty$

ج- لدينا F متصلة وتزايدية قطعا على IR

إذن F تقابل من IR نحو F(IR)

ومنه $F(IR)=\left]\lim_{x\to-\infty}F(x), \lim_{x\to+\infty}F(x)\right[$

0,5

$=]-\infty,+\infty[=IR$

ومنه F تقابل من IR نحو IR

د- برهنت 1) أن F قابلة للاشتقاق

على IR و $F'(x)=e^{x^2}$ و $F(0)=0 \Leftrightarrow G(0)=0$

ومنه فإن F قابلة للاشتقاق

في الصفر و $F'(0)=e^0=1\neq 0$

ومنه فإن F' لا تنعدم في 0

0,5

إذن ف G قابلة للاشتقاق في 0

و $G'(0)=\frac{1}{F'(G(0))}=\frac{1}{F'(0)}=\frac{1}{1}$

إذن $\boxed{G'(0)=1}$

ROYAUME DU MAROC

MINISTÈRE DE L'EDUCATION NATIONALE DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ACADÉMIE RÉGIONALE D'EDUCATION ET DE FORMATION REGION CASABLANCA - SETTAT

Série ou Filière : .... Niveau : ....

EXAMEN DU BACCALAUREAT

Matière : ....

Note définitive sur 20

Appréciations expliquant la note chiffrée

RESERVE AU SECRETARIAT

NOM DU CORRECTEUR ET SIGNATURE : ....

الأعداد العقدية:

1) أ- $z^2+(im+2)z+im+2-m=0$

$\Delta=(im+2)^2-4(im+2-m)$

$=-m^2+4+\cancel{4im}-\cancel{4im}-8+4m$

0,25

$=-m^2-4+4m$

$=(im)^2+(2i)^2-2\times 2i\times im$

إذن $\underline{\Delta=(im-2i)^2}$

ب- حالة 1- إذا كان $m=2$ فإن $\Delta=0$

و منه المعادلة تقبل حلا وحيدا هو

$z=\dfrac{-im-2}{2}=\dfrac{-i\times 2-2}{2}=-1-i$

إذن $\boxed{z=-1-i}$

0,5

حالة 2 إذا كان $m\neq 2$ فإن $\Delta\neq 0$

ومنه للمعادلة حلين هما

$$\begin{cases} z_1=\dfrac{-\cancel{im}-2+\cancel{im}-2i}{2} \\ z_2=\dfrac{-im-2-im+2i}{2} \end{cases}$$ و

إذن

$$\begin{cases} z_1=-1-i \\ z_2=-im-1+i \end{cases}$$

إذن $(E_m)=\{-1-i\,;-im-1+i\}$

N.B : il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) - x$$

$$= f(0) - 0$$ لأن f متصلة على اليمين في الصفر

$$= 1$$

إذن $g(]0,+\infty[) =]-\infty, 1[$

ج - ليكن x من $]0,+\infty[$

الدالة g متصلة على $]0,+\infty[$

لأن f متصلة على $]0,+\infty[$ و $x \mapsto -x$ متصلة على $]0,+\infty[$

و الدالة g تناقصية قطعا على $]0,+\infty[$ إذن فهي تقابل.

ولدينا $0 \in g(]0,+\infty[) =]-\infty, 1[$

إذن

0,25 $(\exists! \alpha \in]0,+\infty[) \,/\, g(\alpha) = 0$

إذن $(\exists! \alpha \in]0,+\infty[) \,/\, f(\alpha) - \alpha = 0$

أي $(\exists! \alpha \in]0,+\infty[) \,/\, f(\alpha) = \alpha$

2 - أ - ليكن a من $]0,+\infty[$

لأجل $n=0$ لدينا، $u_0 = a > 0$

ليكن n من $\mathbb{N}$

نفترض أن $u_n > 0$

لنبين أن $u_{n+1} > 0$

لدينا $u_n > 0$ و f تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$

ومنه $f(u_n) > f(0)$

0,25

أي $f(u_n) > 1 > 0$

إذن $u_{n+1} > 0$

ومنه حسب مبدأ الترجع

$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n > 0$

ب- لدينا : f متصلة على $[0,+\infty[$

و f قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$

ولدينا

$(\forall x \in]0,+\infty[)$; $-\frac{1}{2} \leq 0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$

إذن ! $(\forall x \in]0,+\infty[)$; $\boxed{|f'(x)| \leq \frac{1}{2}}$

و $u_n > 0$ أي $u_n \in]0,+\infty[$

و α عنصر من $]0,+\infty[$

0,5

إذن α و u_n عنصرين من $]0,+\infty[$

إذن حسب متفاوتة التزايدات المنتهية :

$$|f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$$

ولدينا $f(\alpha) = \alpha$ و $f(u_n) = u_{n+1}$

إذن $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$

ج- لدينا من أجل $n = 0$ $|u_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 |a - \alpha|$

أي $|a - \alpha| \leq |a - \alpha|$

وهذا صحيح

ليكن n من $\mathbb{N}$

نفترض أن : $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |a - \alpha|$

لنبين أن : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |a - \alpha|$

0,25

لدينا $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |a - \alpha|$

ومنه $\boxed{\frac{1}{2}|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |a - \alpha|}$ (1)

ولدينا حسب III - 2 - ب

$\boxed{|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|}$ (2)

لأن $\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

و $\lim_{x \to 0^+} 1+x = 1$

إذن f متصلة على اليمين في 0

ب - قابلية الاشتقاق :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{x+1}{x} \times \ln(1+x) - 1}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{(x+1)\ln(1+x) - x}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{x\ln(1+x) + \ln(1+x) - x}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{x\ln(1+x)}{x^2} - \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} - \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}$$

0,5

$$= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

لأن $\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

و 2-I $\lim_{x \to 0^+} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}$

ج -

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x+1}{x}\right) \ln(1+x) = +\infty$$

0,25

لأن $\lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{1} = 1$

و $\lim_{x \to +\infty} \ln(1+x) = +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x^2} \times \ln(1+x)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(x+1)^2}{x^2} \times \frac{\ln(1+x)}{1+x} = 0$$

0,25

ROYAUME DU MAROC
MINISTÈRE DE L'EDUCATION NATIONALE DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
ACADÉMIE RÉGIONALE D'EDUCATION ET DE FORMATION REGION CASABLANCA - SETTAT

Série ou Filière : .... Niveau : ....

EXAMEN DU BACCALAUREAT

Matière : ....

Note définitive sur 20 ....

Appréciations expliquant la note chiffrée ....

RESERVE AU SECRETARIAT

NOM DU CORRECTEUR ET SIGNATURE : ....

لأن : $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x} = 0$ ✓

و $\lim_{x\to+\infty} \frac{(x+1)^2}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+1}{x}\right)^2 = 1$ ✓

نستنتج مما سبق أن (C_f) يقبل فرع شلجمي باتجاه محور الأفاصيل ✓ 0,25

ج - أ - الدالة $x \mapsto \ln(1+x)$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ لأنه $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}) : 1+x > 0$ ✓

والدالة $x \mapsto x+1$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ لأنها حدودية

والدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ لأنه مجال ضمن مجموعة تعريفها. ✓

إذن f قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ لأنها جداء هذه الدوال. ✓ 0,5

ليكن $x \in]0,+\infty[$; نعلم أن f قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$; أي

$$f'(x) = \frac{x+1}{x} \times \frac{1}{x+1} + \ln(1+x) \times \frac{x-(x+1)}{x^2}$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{\ln(1+x)}{x^2}$$ ✓

إذن $f'(x) = \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}$ ✓

ب - لدينا حسب I ج ; $(\forall x \in]0,+\infty[)$;

$$\frac{1}{2(1+x)} \leq \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = f'(x)$$

وبما أن $x > 0$ فإن $\frac{1}{1+x} > 0$ أي $\frac{1}{2(1+x)} > 0$ ✓

إذن $(\forall x \in]0,+\infty[) : f'(x) > 0$

~~ولدينا $n^2 \equiv 1 [p]$~~

~~أي $n^4 \equiv 1 [p]$~~

~~إذن $n^{p-5} \times n^4 \equiv n^{p-5} [p]$ (2)~~

~~من (1) و (2) نستنتج أن $n^{p-5} \equiv 1 [p]$~~

~~2 - p~~

الحسابيات 1

1 - ليكن n عدد صحيح نسبي و p عدد أولي

لدينا: $p-5 = 3+4k-5 = 4k-2$

$= 2(2k-1)$

ولدينا $k>0$

أي $2k-1>0$

0,5

ولدينا: $n^2 \equiv 1 [p]$

أي $n^{2(2k-1)} \equiv 1^{2k-1} [p] \equiv 1 [p]$

إذن $n^{p-5} \equiv 1 [p]$

2 - أ - لدينا: $n^{p-5} \equiv 1 [p]$

أي $(\exists k \in \mathbb{Z}): n^{p-5} = 1+pk$

ومنه $n^{p-5} - pk = 1$

أي $(p-6>0)$ $n^{p-6} \times n - pk = 1$ 0,5

ومنه حسب مبرهنة بوزو (يوجد n^{p-6} و $-k$ من $\mathbb{Z}$)

n و p أوليين فيما بينهما.

ب - لدينا p عدد أولي موجب

و n و p أوليين فيما بينهما

ومنه حسب مبرهنة فيرما الصغرى:

0,5 $n^{p-1} \equiv 1 [p]$

ج - أي لنتحقق أن $2+(k-1)(p-1)-k(p-5)=0$

لدينا: $2+(k-1)(p-1)-k(p-5) = 2+\cancel{kp}-p-k+1-\cancel{kp}+5k$

(لأن $p=3+4k$) $= 3+4k-p = p-p = 0$

Série ou Filière : .... Niveau : ....

EXAMEN DU BACCALAUREAT

Matière : ....

Note définitive sur 20

Appréciations expliquant la note chiffrée

RESERVE AU SECRETARIAT

NOM DU CORRECTEUR ET SIGNATURE : ....

إذن $2+(k-1)(p-1)-k(p-5)=0$

ومنه $2+(k-1)(p-1)=k(p-5)$

0,8

د -

لدينا $n^{p-1}\equiv 1\,[p]$

أي $n^{(p-1)(k-1)}\equiv 1^{(k-1)}[p]\equiv 1\,[p]$

ومنه $n^{(p-1)(k-1)}\times n^2\equiv n^2\,[p]$

$\Rightarrow n^{2+(p-1)(k-1)}\equiv n^2\,[p]$

ولدينا $2+(p-1)(k-1)=k(p-5)$

إذن : $\Rightarrow n^{k(p-5)}\equiv n^2\,[p]$ (1)

0,5

ولدينا : $n^{p-5}\equiv 1\,[p]$

أي $n^{k(p-5)}\equiv 1^k\,[p]\equiv 1\,[p]$ (2)

من (1) و (2) لدينا : $n^2\equiv 1\,[p]$

3 - لدينا حسب الأسئلة السابقة : $n^2\equiv 1\,[p]\Leftrightarrow n^{p-5}\equiv 1\,[p]$

في حالة $p=67$ لدينا : $67=3+4\times 16$

أي $n^{62}\equiv 1\,[67]\Leftrightarrow n^{67-5}\equiv 1\,[67]$

وبما أن $n^2\equiv 1\,[p]\Leftrightarrow n^{p-5}\equiv 1\,[p]$

فإن $n^{62}\equiv 1\,[67]\Leftrightarrow n^2\equiv 1\,[\ ]$

$\Leftrightarrow n^2-1\equiv 0\,[67]$

$\Leftrightarrow (n-1)(n+1)\equiv 0\,[67]$

$\Leftrightarrow n-1\equiv 0\,[67]$ أو $n+1\equiv 0\,[67]$

لأن 67 أولي

$n^{62}\equiv 1\,[67]\Leftrightarrow n=1+67k$ أو $n=67k-1$ (k من $\mathbb{Z}$)

إذن $S=\{1+67k\,;\,67k-1\,/\,k\in\mathbb{Z}\}$

0,8

ومنه:

$$\begin{pmatrix} x & -2y \\ y & x+2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

أي $x=0$ و $y=0$ و $-2y=0$ و $x+2y=0$

إذن $\underline{x=0 \text{ و } y=0}$

ومنه (I,J) أسرة حرة.

أي (I,J) أساس للفضاء المتجهي الحقيقي $(E,+,\cdot)$

3- أ- نعلم أن E جزء غير فارغ من $M_2(\mathbb{R})$

ليكن a و b و x و y من $\mathbb{R}$

$$M(a,b)\times M(x,y) = \begin{pmatrix} a & -2b \\ b & a+2b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x & -2y \\ y & x+2y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ax-2by & -2ya-2bx-4by \\ bx+ay+2by & -2by+ax+2ya+2bx+4by \end{pmatrix}$$

0,5

$$= \begin{pmatrix} ax-2by & -2(ya+bx+2by) \\ bx+ay+2by & ax-2by+2(ya+bx+2by) \end{pmatrix}$$

$$= M(ax-2by \,;\, bx+ay+2by) \in E$$

لأن $ax-2by$ و $bx+ay+2by$ عنصرين من $\mathbb{R}$

إذن E جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}),\times)$

ب- لدينا: $(E,+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي

أي $\underline{(E,+) \text{ زمرة تبادلية}}$

ولدينا: E زمرة جزئية للزمرة $(M_2(\mathbb{R}),+)$

أي E جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}),+)$

ولدينا: E جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}),\times)$

$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{a-w}{b-w}\right) - \arg\left(\frac{a-m}{b-m}\right) \equiv 0\ [\pi]$

$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{w-a}{w-b}\right) - \arg\left(\frac{m-a}{m-b}\right) \equiv 0\ [\pi]$

$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{w-a}{w-b} \times \frac{m-b}{m-a}\right) \equiv 0\ [\pi]$

$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{w-a}{w-b} \times (m-b) \times \frac{1}{m-a}\right) \equiv 0\ [\pi]$

$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{m'-a}{m-a}\right) \equiv 0\ [\pi]$

0,5

$\Leftrightarrow \frac{m'-a}{m-a} \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow$ A و M و M' مستقيمية

إذن

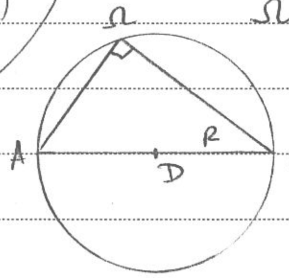
A و M و Ω و B متداورة $\Leftrightarrow$ A و M و M' مستقيمية

ج-

A و M' و M مستقيمية $\Leftrightarrow$ A و M و Ω و B متداورة

$\Leftrightarrow$ M تنتمي إلى الدائرة المحيطة بالمثلث $A\Omega B$

0,5



ولدينا $A = R(B)$ أي $\Omega A = \Omega B$

و $(\Omega A) \perp (\Omega B)$

إذن $[AB]$ قطر للدائرة

ومنه مركز الدائرة هو منتصف $[AB]$

$z_D = \frac{a+b}{2} = \frac{-1-i+2}{2}$

لحق الشعاع $\boxed{z_D = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i}$

R شعاع هذه الدائرة: $R = |D - \Omega| = \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i - i\right|$

$\boxed{R} = \left|\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i\right| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{4}} = \boxed{\frac{\sqrt{10}}{2}}$

ROYAUME DU MAROC
MINISTÈRE DE L'EDUCATION NATIONALE
DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE
DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
ACADÉMIE RÉGIONALE
D'EDUCATION ET DE FORMATION
REGION CASABLANCA - SETTAT

Série ou Filière : .... Niveau : ....

EXAMEN DU BACCALAUREAT

Matière : ....

Note définitive sur 20
....

Appréciations expliquant la note chiffrée

RESERVE AU SECRETARIAT

NOM DU CORRECTEUR ET SIGNATURE : ....

وبما أن الضرب توزيعي بالنسبة للجمع في $M_2(\mathbb{R})$

فإن الضرب توزيعي بالنسبة للجمع في E.

ونعلم أن E جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}), \times)$

و الضرب تجميعي في $M_2(\mathbb{R})$

أي فهو تجميعي في E. – ليكن x و y و a و b من $\mathbb{R}$

لدينا : $M(a,b)\times M(x,y) = M(ax-2by ; bx+ay+2by)$

حسب السؤال السابق

و $M(x,y)\times M(a,b) = \begin{pmatrix} x & -2y \\ y & x+2y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & -2b \\ b & a+2b \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} xa-2yb & -2ay-2xb-4yb \\ xb+ya+2yb & -2yb+xa+2ay+2xb+4yb \end{pmatrix}$

0,5

$M(x,y)\times M(a,b) = M(xa-2yb ; xb+ya+2yb)$

ومنه $M(x,y)\times M(a,b) = M(a,b)\times M(x,y)$

إذن الضرب تبادلي في E.

ومنه نستنتج أن $(E,+,\times)$ حلقة تبادلية.

4 – أ ليكن $a+ib$ و $x+iy$ عنصرين من $\mathbb{C}^*$

$\varphi((x+iy)(a+ib)) = \varphi(xa+iya+ibx-yb)$

$= \varphi(xa-yb+i(bx+ya))$

$= M(xa-yb+bx+ya ; -bx-ya)$