تصحيح التمرين الأول

.1

✓ لدينا : $E \subset M_2\ \mathbb{R}$

و $E \neq \varnothing$ ($I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in E$ لأن $I = M\ 1,0$)

لتكن $M\ x,y$ و $M\ a,b$ من E و ليكن α و β من $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \alpha M\ a,b\ + \beta M\ x,y &= \alpha \begin{pmatrix} a & -3b \\ b & a \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} x & -3y \\ y & x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha a + \beta x & -3\ \alpha b + \beta y \\ \alpha b + \beta y & \alpha a + \beta x \end{pmatrix} \\ &= M\ \alpha a + \beta x, \alpha b + \beta y\ \in E \end{aligned}$$

$$\alpha a + \beta x, \alpha b + \beta y\ \in \mathbb{R}^2$$

إذن : E فضاء متجهي جزئي من $M_2\ \mathbb{R}\ ,+,\cdot$

✓

- لتكن $M\ x,y$ من E

$$\begin{aligned} M\ x,y &= \begin{pmatrix} x & -3y \\ y & x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -3y \\ y & 0 \end{pmatrix} \\ &= x.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y.\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= x.I + y.J \end{aligned}$$

إذن I,J أسرة مولدة للفضاء E

- ليكن α و β من $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \alpha.I + \beta.J = O \quad &\Rightarrow \quad M\ \alpha,\beta\ = O \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha & -3\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

إذن I,J أسرة حرة للفضاء E

وبالتالي $\{I,J\}$ أساس للفضاء E

و منه $\dim E = card\{I,J\} = 2$

.2 أ) لنبين أن E جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}),\times)$

لدينا : $E \neq \varnothing$ و $E \subset M_2(\mathbb{R})$

لتكن $M(x,y)$ و $M(a,b)$ من E

$$\begin{aligned} M(a,b)\times M(x,y) &= \begin{pmatrix} a & -3b \\ b & a \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} x & -3y \\ y & x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ax-3by & -3ay-3bx \\ bx+ay & -3by+ax \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ax-3by & -3(ay+bx) \\ ay+bx & ax-3by \end{pmatrix} \\ &= M(ax-3by, ay+bx) \in E \end{aligned}$$

$(ax-3by, ay+bx) \in \mathbb{R}^2$

إذن E جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}),\times)$

ب) لنبين أن $(E,+,\times)$ حلقة واحدية و تبادلية

❖

✓ $(E,+)$ زمرة تبادلية (لأن $(E,+,\cdot)$ فضاء متجهي)

✓ بما أن E جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}),\times)$ و $\times$ تجميعي و توزيعي بالنسبة ل $+$ في $M_2(\mathbb{R})$

فإن $\times$ تجميعي و توزيعي بالنسبة ل $+$ في E

إذن $(E,+,\times)$ حلقة

❖

✓ $I = M(1,0)$ هو العنصر المحايد بالنسبة ل $\times$

إذن $(E,+,\times)$ حلقة واحدية

❖

✓ $\times$ تبادلي في E

لتكن $M(x,y)$ و $M(a,b)$ من E

لدينا : $M(a,b)\times M(x,y) = M(ax-3by, ay+bx)$

و : $M(x,y)\times M(a,b) = M(xa-3yb, xb+ya)$

إذن لكل $M(x,y)$ و $M(a,b)$ من E : $M(a,b)\times M(x,y) = M(x,y)\times M(a,b)$

و بالتالي : $(E,+,\times)$ حلقة واحدية و تبادلية

.3 أ)

❖ ليكن a,b و x,y من $\mathbb{R}^2$

✓ $$\varphi\left((a+ib)\times(x+iy)\right)=\varphi\left((ax-by)+i(ay+bx)\right)=M\left(ax-by,\frac{ay+bx}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\begin{aligned}\varphi(a+ib)\times\varphi(x+iy) &= M\left(a,\frac{b}{\sqrt{3}}\right)\times M\left(x,\frac{y}{\sqrt{3}}\right)\\ &= M\left(ax-3\times\frac{b}{\sqrt{3}}\times\frac{y}{\sqrt{3}},a\times\frac{y}{\sqrt{3}}+\frac{b}{\sqrt{3}}\times x\right)\\ &= M\left(ax-by,\frac{ay+bx}{\sqrt{3}}\right)\end{aligned}$$ ✓

إذن φ تشاكل من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(E^*,\times)$

❖ ليكن $M(a,b)$ من E^*

لنحل المعادلة : $\varphi(x+iy)=M(a,b)$

$$\begin{aligned}\varphi(x+iy)=M(a,b) &\Leftrightarrow M\left(x,\frac{y}{\sqrt{3}}\right)=M(a,b)\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}x=a\\ \dfrac{y}{\sqrt{3}}=b\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}x=a\\ y=b\sqrt{3}\end{cases}\end{aligned}$$

إذن لكل $M(a,b)$ من E^* يوجد زوج وحيد $(x,y)=(a,b\sqrt{3})$ من $\mathbb{R}^2$ بحيث :

$$\varphi(x+iy)=M(a,b)$$

و منه φ تقابل من $\mathbb{C}^*$ نحو E^*

و بالتالي : φ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(E^*,\times)$

ب) بما أن φ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(E^*,\times)$ و $(\mathbb{C}^*,\times)$ زمرة تبادلية فإن $(E^*,\times)$ زمرة تبادلية

ج)

✓

$$\begin{aligned} J^{2017} &= \left(M(0,1)\right)^{2017} \\ &= \left(M\left(0,\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)\right)^{2017} \\ &= \left(\varphi\left(0+i\sqrt{3}\right)\right)^{2017} \\ &= \left(\varphi\left(i\sqrt{3}\right)\right)^{2017} \\ &= \varphi\left(\left(\sqrt{3}\right)^{2017}\times i\right) \\ &= \varphi\left(\left(\sqrt{3}\right)^{2016}\sqrt{3}\times i\right) \\ &= \varphi\left(3^{1008}\sqrt{3}\times i\right) \end{aligned}$$

✓

$$\begin{aligned} \left(J^{2017}\right)^{-1} &= \left(\varphi\left(3^{1008}\sqrt{3}\times i\right)\right)^{-1} \\ &= \varphi\left(\left(3^{1008}\sqrt{3}\times i\right)^{-1}\right) \\ &= \varphi\left(\frac{1}{3^{1008}\sqrt{3}\times i}\right) \\ &= \varphi\left(\frac{-i}{3^{1008}\sqrt{3}}\right) \\ &= \varphi\left(0+i\left(\frac{-1}{3^{1008}\sqrt{3}}\right)\right) \\ &= M\left(0,\frac{-\sqrt{3}}{3^{1008}\times\sqrt{3}}\right) \\ &= M\left(0,\frac{-1}{3^{1008}}\right) \end{aligned}$$

.4

✓ لدينا $(E,+,\times)$ حلقة واحدية و تبادلية

✓ إذن يكفي أن نبين أن كل عنصر $M(x,y)$ من E^* يقبل مقلوبا

ليكن $M(x,y)$ من E بحيث : $M(x,y)\neq M(0,0)$

لدينا $M(x,y)=\begin{pmatrix} x & -3y \\ y & x \end{pmatrix}$

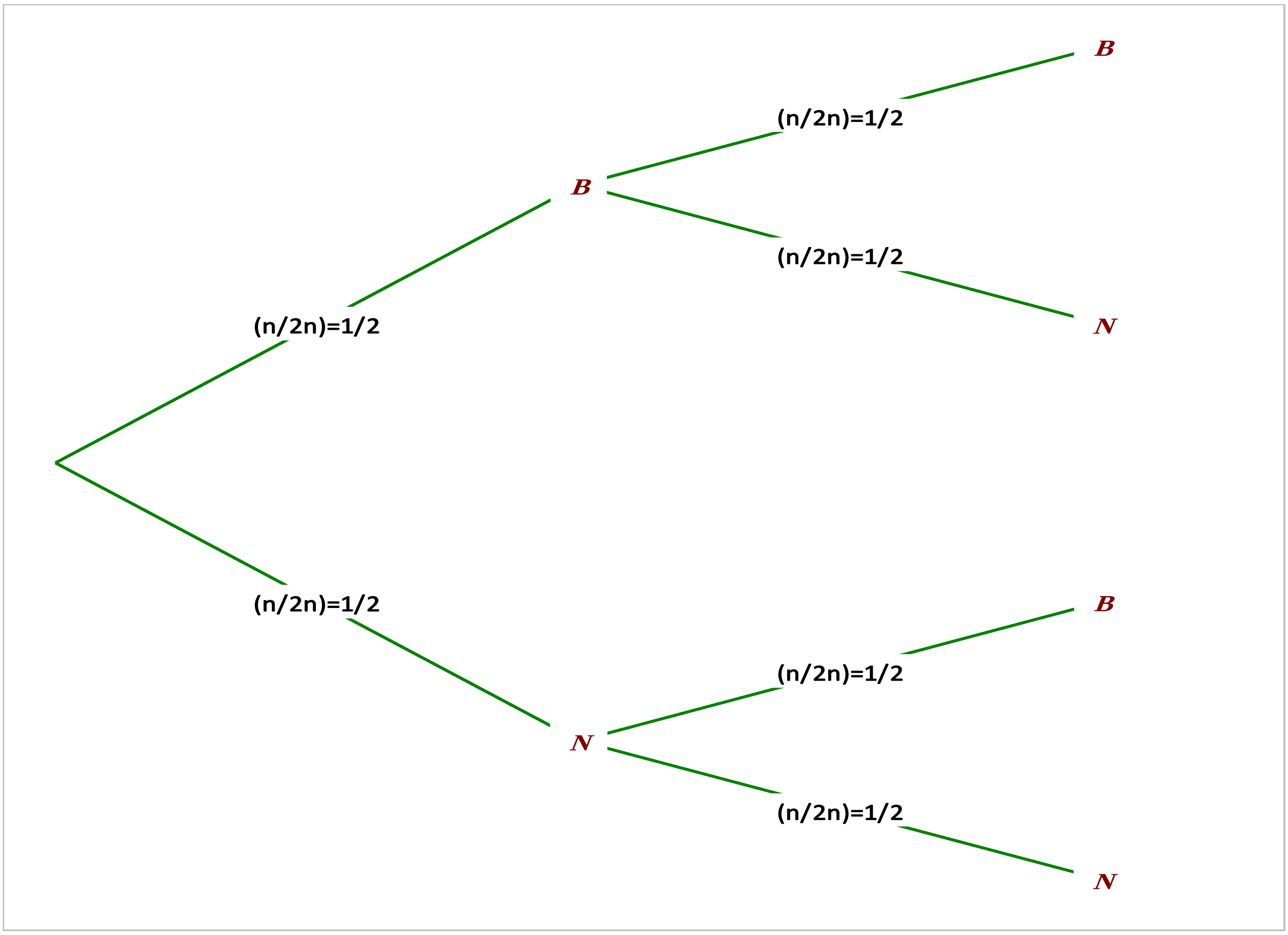
$$d\acute{e}tM(x,y)=\begin{vmatrix} x & -3y \\ y & x \end{vmatrix}=x^2+3y^2$$

إذن $d\acute{e}tM(x,y)\neq 0$ (لأن $(x,y)\neq(0,0)$)

$$M(x,y)^{-1}=\begin{pmatrix} \dfrac{x}{x^2+3y^2} & \dfrac{3y}{x^2+3y^2} \\ \dfrac{-y}{x^2+3y^2} & \dfrac{x}{x^2+3y^2} \end{pmatrix}=M\left(\dfrac{x}{x^2+3y^2},\dfrac{-y}{x^2+3y^2}\right)\in E^*$$

و بالتالي : $(E,+,\times)$ جسم تبادلي.

تصحيح التمرين الثاني



.1 ليكن الحدث E " ربح 20 نقطة " بمعنى لون الكرتين المسحوبتين أبيض

$$p(E)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

ليكن الحدث F " خسارة 20 نقطة " بمعنى لون الكرتين المسحوبتين أسود

$$p(F)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

ليكن الحدث G " الربح منعدم " بمعنى الكرتان المسحوبتان مختلفتي اللون

$$p(G)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

.2 أ) لنحسب احتمال ربح 100 نقطة بمعنى تحقق الحدث E خمس مرات

$$C_5^5\,(p(E))^5(1-p(E))^{5-5}=1\times\left(\frac{1}{4}\right)^5\times\left(\frac{3}{4}\right)^0=\left(\frac{1}{4}\right)^5$$

ب) لنحسب احتمال ربح 40 نقطة بمعنى تحقق الحدث E مرتين

$$C_5^2\,(p(E))^2(1-p(E))^{5-2}=10\times\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{270}{1024}=\frac{135}{512}$$

.3 أ) $p(X=-20)=p(F)=\dfrac{1}{4}$

$$p(X=0)=p(G)=\frac{1}{2}$$

$$p(X=20)=p(E)=\frac{1}{4}$$

قانون احتمال X

x_i	-20	0	20
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

ب) الأمل الرياضي :

$$E(X)=\left(-20\times\frac{1}{4}\right)+\left(0\times\frac{1}{2}\right)+\left(20\times\frac{1}{4}\right)=0$$

تصحيح التمرين الثالث

1. ليكن $z \in \mathbb{C}^*$

M و M' منطبقتين تكافئ $z' = z$

تكافئ $\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right) = z$

تكافئ $z = \frac{1}{z}$

تكافئ $z^2 = 1$

تكافئ $z = 1$ أو $z = -1$

2. ليكن $z \in \mathbb{C}^* - \ -1,1$

$$\begin{aligned}
\frac{z'+1}{z'-1} &= \frac{\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)+1}{\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)-1} \\
&= \frac{z+\frac{1}{z}+2}{z+\frac{1}{z}-2} \\
&= \frac{z^2+1+2z}{z^2+1-2z} \\
&= \frac{z+1\ ^2}{z-1\ ^2} \\
&= \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2
\end{aligned}$$

إذن $\frac{z'+1}{z'-1} = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$ لكل z من $\mathbb{C}^* - \ -1,1$

3. ليكن Δ واسط القطعة AB

نفترض أن M تنتمي إلى Δ

إذن $AM = BM$

إذن $\frac{BM}{AM} = 1$ $M \neq A$

لنبين أن M' تنتمي إلى Δ

لدينا : $\dfrac{BM'}{AM'}=\dfrac{|z'+1|}{|z'-1|}=\left|\dfrac{z'+1}{z'-1}\right|=\left|\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^2\right|=\left(\dfrac{|z+1|}{|z-1|}\right)^2=\left(\dfrac{BM}{AM}\right)^2=1^2=1$

إذن $AM'=BM'$

و منه M' تنتمي إلى Δ

4. لتكن Γ الدائرة التي أحد أقطارها AB

نفترض أن M تنتمي إلى Γ

إذن $\left(\overline{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BM}}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$ $\quad(\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{BM})$

إذن $\arg\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$

لنبين أن M' تنتمي إلى AB

$$\begin{aligned}\left(\overline{\overrightarrow{AM'},\overrightarrow{BM'}}\right)&\equiv\arg\left(\dfrac{z'+1}{z'-1}\right)\ [2\pi]\\&\equiv\arg\left(\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^2\right)\ [2\pi]\\&\equiv 2\arg\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)\ [2\pi]\\&\equiv\pi\ [2\pi]\end{aligned}$$

لأن : $\arg\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$

إذن A و B و M' نقط مستقيمية و منه M' تنتمي إلى AB

تصحيح التمرين الرابع

الجزء الأول :

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $I=[0,+\infty[$ بما يلي :

$$f(0)=1 \quad \text{و} \quad \forall x\in\,]0,+\infty[\quad f(x)=\dfrac{Arc\tan(x)}{x}$$

1. لنبين أن f متصلة على المجال I

✓ لندرس اتصال f في 0 على اليمين

لدينا $f(0)=1$

و $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{Arc\tan(x)}{x}=1$

بما أن $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)$ فإن f في 0 على اليمين

✓ $f_1 : x \mapsto Arc\tan\ x$ متصلة على $\mathbb{R}$ و بالخصوص متصلة على $0,+\infty$

$f_2 : x \mapsto x$ متصلة على $\mathbb{R}$ و بالخصوص متصلة على $0,+\infty$

و $f_2\ x\ \neq 0 \quad \forall x \in\ 0,+\infty$

إذن $f = \dfrac{f_1}{f_2}$ متصلة على $0,+\infty$

خلاصة : f متصلة على المجال I

2. أ) ليكن $x \in I =\ 0,+\infty$ و ليكن $t \in\ 0,x$

لدينا : $0 \le t \le x$

إذن : $0 \le t^2 \le x^2$

إذن : $1 \le 1+t^2 \le 1+x^2$

و منه : $\dfrac{1}{1+x^2} \le \dfrac{1}{1+t^2} \le 1 \quad \forall t \in\ 0,x$

ب) لدينا : $\dfrac{1}{1+x^2} \le \dfrac{1}{1+t^2} \le 1 \quad \forall t \in\ 0,x$

إذن : $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+x^2}dt \le \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt \le \int_0^x 1dt$

إذن : $\left[\dfrac{t}{1+x^2}\right]_0^x \le\ Arc\tan t\ _0^x \le\ t\ _0^x$

و منه : $\dfrac{x}{1+x^2} \le Arc\tan x \le x \quad \forall x \in\ 0,+\infty$

ج) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{f\ x\ - f\ 0}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{Arc\tan x}{x} - 1}{x}$

لدينا : $\dfrac{x}{1+x^2} \le Arc\tan x \le x \quad \forall x \in\ 0,+\infty$

إذن : $\dfrac{1}{1+x^2} \le \dfrac{Arc\tan x}{x} \le 1 \quad \forall x \in\ 0,+\infty$

إذن : $\dfrac{1}{1+x^2} - 1 \le \dfrac{Arc\tan x}{x} - 1 \le 0 \quad \forall x \in\ 0,+\infty$

إذن : $\dfrac{-x}{1+x^2} \le \dfrac{\frac{Arc\tan x}{x} - 1}{x} \le 0 \quad \forall x \in\ 0,+\infty$

لدينا : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{-x}{1+x^2} = 0$

إذن : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{Arc\tan x}{x} - 1}{x} = 0$

و منه : $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f\ \ x\ - f\ \ 0}{x-0}=0$

و بالتالي f قابلة للاشتقاق في الصفر على اليمين و لدينا $f'_d\ \ 0\ =0$

3. أ) f قابلة للاشتقاق على $0,+\infty$ (كخارج دالتين قابلتين للاشتقاق على $0,+\infty$)

ليكن $x\in\ 0,+\infty$: لدينا

$$\begin{aligned} f'\ \ x &= \left(\frac{Arc\tan x}{x}\right)' \\ &= \frac{Arc\tan'\ \ x\ \times x - Arc\tan\ \ x\ \times\ \ x\ '}{x^2} \\ &= \frac{\frac{x}{1+x^2} - Arcatn\ \ x}{x^2} \end{aligned}$$

إذن : $\forall x\ \ 0,+\infty \qquad f'\ \ x\ = \dfrac{\frac{x}{1+x^2} - Arcatn\ \ x}{x^2}$

ب) لدينا : $\forall x\ \ 0,+\infty \qquad f'\ \ x\ = \dfrac{\frac{x}{1+x^2} - Arcatn\ \ x}{x^2}$

و لدينا : $\forall x\ \ 0,+\infty \qquad x^2>0$

إذن إشارة $f'\ \ x$ هي إشارة : $\dfrac{x}{1+x^2} - Arcatn\ \ x$

حسب الجزء الأول . 2) ب) : $\dfrac{x}{1+x^2} - Arcatn\ \ x\ \leq 0$

إذن : $f'\ \ x\ \leq 0$

و منه : f تناقصية .

الجزء الثاني :

1. أ) ليكن $t\in\ 0,+\infty$ و $x\in\ 0,+\infty$

لدينا : $\dfrac{t}{1+t^2}\leq Arc\tan t\leq t$

إذن : $\dfrac{1}{1+t^2}\leq \dfrac{Arc\tan t}{t}\leq 1$

إذن: $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt \leq \int_0^x \frac{Arc\tan t}{t}dt \leq \int_0^x 1dt$

إذن : $Arc\tan x\leq \displaystyle\int_0^x f\ \ t\ \ dt\leq x$

إذن : $\dfrac{Arc\tan x}{x} \leq \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt \leq 1$

و منه : $\dfrac{Arc\tan x}{x} \leq g(x) \leq 1 \qquad \forall x \in \,]0,+\infty[$

ب) لدينا : $f(x) \leq g(x) \leq 1 \qquad \forall x \in [0,+\infty[$

إذن : $f(x) - 1 \leq g(x) - 1 \leq 0 \qquad \forall x \in [0,+\infty[$

إذن : $\dfrac{f(x)-1}{x} \leq \dfrac{g(x)-1}{x} \leq 0 \qquad \forall x \in \,]0,+\infty[$

إذن : $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} \leq \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} \leq 0 \qquad \forall x \in \,]0,+\infty[$

لدينا f قابلة للاشتقاق في الصفر على اليمين و لدينا $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$

إذن : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} = 0$

و بالتالي : g قابلة للاشتقاق في الصفر على اليمين و لدينا : $g'_d(0) = 0$

2. أ) ليكن $x \in \,]0,+\infty[$

$t \mapsto f(t)$ متصلة على $[0,x]$

و الدالة $x \mapsto x$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$

إذن الدالة $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$

و لدينا : $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$

و منه g قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ (كجداء دالتين قابلتين للاشتقاق على $]0,+\infty[$)

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\right)' \\
&= \left(\frac{1}{x}\right)'\int_0^x f(t)\,dt + \frac{1}{x}\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)' \\
&= \frac{-1}{x^2}\int_0^x f(t)\,dt + \frac{1}{x}f(x) \\
&= \frac{1}{x}\left(\frac{-1}{x}\int_0^x f(t)\,dt + f(x)\right) \\
&= \frac{1}{x}\big(f(x) - g(x)\big)
\end{aligned}$$

و منه : $\forall x \in\ 0,+\infty \quad g'\ x\ = \dfrac{1}{x}\ f\ x\ - g\ x$

3. لدينا : $x > 0$ و لدينا : $f\ x\ - g\ x\ \leq 0$

إذن : $\forall x \in\ 0,+\infty \quad g'\ x\ \leq 0$

و منه g تناقصية على I

4. أ) ليكن $x > 1$ و ليكن $1 \leq t \leq x$

لدينا : $0 < Arc\tan t < \dfrac{\pi}{2}$

إذن : $0 < \dfrac{Arc\tan t}{t} < \dfrac{\pi}{2t}$

إذن : $0 < \displaystyle\int_1^x \dfrac{Arc\tan t}{t}dt < \int_1^x \dfrac{\pi}{2t}dt$

إذن : $0 < \displaystyle\int_1^x \dfrac{Arc\tan t}{t}dt < \dfrac{\pi}{2}\ \ln t\ _1^x$

إذن : $0 < \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_1^x f\ t\ dt < \dfrac{\pi}{2}\dfrac{\ln x}{x}$

بما أن : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ فإن $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}\int_1^x f\ t\ dt = 0$

ب) لدينا : $g\ x\ = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f\ t\ dt = \dfrac{1}{x}\int_0^1 f\ t\ dt + \dfrac{1}{x}\int_1^x f\ t\ dt$

ليكن $t \in\ 0,1$

لدينا : $0 \leq t \leq 1$ و f تناقصية

إذن : $f\ 1\ \leq f\ t\ \leq f\ 0$

إذن : $\dfrac{\pi}{4} \leq f\ t\ \leq 1$

إذن : $\dfrac{\pi}{4} \leq \displaystyle\int_0^1 f\ t\ dt \leq 1$

إذن : $\dfrac{\pi}{4x} \leq \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^1 f\ t\ dt \leq \dfrac{1}{x}$

بما أن : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\pi}{4x} = 0$ و $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

فإن : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}\int_0^1 f\ t\ dt = 0$

و لدينا كذلك : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_1^x f\ \ t\ dt = 0$

و منه : $\lim\limits_{x\to+\infty} g\ \ x\ = 0$

الجزء الثالث :

1. لنبين أن المعادلة $g\ \ x\ = x$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $0,1$

نعتبر الدالة : $h : x \mapsto g\ \ x\ - x$

✓ h <u>متصلة</u> على $0,1$

✓ h قابلة للاشتقاق على $0,1$ و لدينا : $h'\ \ x\ = g'\ \ x\ - 1 < 0$ (لأن $g'\ \ x\ \le 0$)

إذن h <u>تناقصية قطعا</u> على $0,1$

✓ ولدينا : على $h\ \ 0\ = g\ \ 0\ - 0 = 1 > 0$ و $h\ \ 1\ = g\ \ 1\ - 1 = \int_0^1 f\ \ t\ dt - 1 < 0$

إذن : $h\ \ 0\ \times h\ \ 1\ < 0$

و منه حسب مبرهنة القيم الوسيطية بالوحدانية : $\exists! \alpha \in\ 0,1 \quad g\ \ \alpha\ = 0$

2. أ) ليكن $x \in\ 0,+\infty$

لدينا : $1 - f\ \ x\ = 1 - \frac{Arc\tan x}{x}$

حسب الجزء الأول . 2) ب) : $\frac{x}{1+x^2} \le Arc\tan\ x\ \le x \quad \forall x \in\ 0,+\infty$

إذن : $\frac{1}{1+x^2} \le \frac{Arc\tan\ x}{x} \le 1 \quad \forall x \in\ 0,+\infty$

إذن : $-1 \le -\frac{Arc\tan\ x}{x} \le -\frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in\ 0,+\infty$

إذن : $0 \le 1 - \frac{Arc\tan\ x}{x} \le 1 - \frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in\ 0,+\infty$

و منه : $0 \le 1 - f\ \ x\ \le \frac{x^2}{1+x^2} \quad \forall x \in\ 0,+\infty$

(ملاحظة النتيجة تبقى صحيحة في حالة $x = 0$)

ب) ليكن $x \in\ 0,+\infty$

لدينا : $0 \le 1 - f\ \ x\ \le \frac{x^2}{1+x^2}$

إذن : $-1 \leq -f(x) \leq \dfrac{-1}{1+x^2}$

إذن : $\dfrac{1}{1+x^2} \leq f(x) \leq 1$

إذن : $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt \leq \int_0^x f(t)\,dt \leq \int_0^x 1dt$

إذن : $\displaystyle Arc\tan x \leq \int_0^x f(t)\,dt \leq x$

إذن : $\displaystyle f(x) \leq \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt \leq 1$

إذن : $f(x) \leq g(x) \leq 1$

إذن : $0 \leq g(x) - f(x) \leq 1 - f(x) \leq \dfrac{x^2}{1+x^2}$

إذن : $0 \leq \dfrac{1}{x}\left(g(x) - f(x)\right) \leq \dfrac{x}{1+x^2} \leq \dfrac{1}{2}$

و منه : $\forall x \in]0,+\infty[\quad |g'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$

3. أ) ليكن $n \in \mathbb{N}$: لدينا :

- ✓ g متصلة على المجال المغلق الذي طرفاه u_n و α
- ✓ g قابلة للاشتقاق على المجال المفتوح الذي طرفاه u_n و α
- ✓ $\forall x \in]0,+\infty[\quad |g'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$

إذن حسب متفاوتة التزايدات المنتهية : $|g(u_n) - g(\alpha)| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$

وبما أن $u_{n+1} = g(u_n)$ و $\alpha = g(\alpha)$

فإن : $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$

ب) لنتين بالترجع : $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$

✓ من أجل $n = 0$:

لدينا : $|u_0-\alpha|=|u_0-\alpha|$ و $\left(\frac{1}{2}\right)^0|u_0-\alpha|=|u_0-\alpha|$

إذن : $|u_0-\alpha|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^0|u_0-\alpha|$

✓ ليكن $n\in\mathbb{N}$

- نفترض أن : $|u_n-\alpha|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n|u_0-\alpha|$
- و نبين أن : $|u_{n+1}-\alpha|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}|u_0-\alpha|$ ؟

لدينا حسب الافتراض : $|u_n-\alpha|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n|u_0-\alpha|$

إذن : $\boxed{\frac{1}{2}|u_n-\alpha|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}|u_0-\alpha|}$ $\boxed{a}$

و حسب نتيجة السؤال السابق : $\boxed{|u_{n+1}-\alpha|\leq\frac{1}{2}|u_n-\alpha|}$ $\boxed{b}$

من $\boxed{a}$ و $\boxed{b}$ نستنتج : $|u_{n+1}-\alpha|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}|u_0-\alpha|$

✓ نستنتج : $\forall n\in\mathbb{N}\quad |u_n-\alpha|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n|u_0-\alpha|$

بما أن $-1<\frac{1}{2}<1$ فإن : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ و منه : $\lim_{n\to+\infty}|u_n-\alpha|=0$

و بالتالي المتتالية u_n متقاربة و لدينا : $\lim_{n\to+\infty}u_n=\alpha$

つづく