الثانية علوم رياضية

تصحيح الامتحان الوطني 2017

التمرين الأول : (3,5 ن)

نذكر أن $\left(M_3(\mathbb{R}),+,\times\right)$ حلقة واحدية صفرها المصفوفة $O=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

و وحدتها المصفوفة $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ و أن $(\mathbb{C},+,\times)$ جسم تبادلي .

نضع $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$ و لكل (a,b) من $\mathbb{R}^2$ ، $M(a,b)=\begin{pmatrix}a&b&-b\\0&0&0\\b&-a&a\end{pmatrix}$

نعتبر المجموعة $E=\left\{M(a,b)/(a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$

0,5	**1-** بين أن E زمرة جزئية للزمرة $\left(M_3(\mathbb{R}),+\right)$
0,5	**2-** نعرف على $M_3(\mathbb{R})$ قانون التركيب الداخلي "T" بما يلي : $\left(\forall(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4\right)\quad M(a,b)\mathrm{T}M(c,d)=M(a,b)\times A\times M(c,d)$ ، تحقق أن E جزء مستقر من $\left(M_3(\mathbb{R}),\mathrm{T}\right)$
	3- ليكن φ التطبيق من $\mathbb{C}^*$ نحو E الذي يربط كل عدد عقدي غير منعدم $a+ib$ (حيث: $(a,b)\in\mathbb{R}^2$) بالمصفوفة $M(a,b)$ من E
0,75	أ) تحقق من أن φ تشاكل من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو (E,T) و أن $\varphi(\mathbb{C}^*)=E^*$ حيث : $E^*=E\setminus\{M(0,0)\}$
0,75	ب) استنتج أن (E^*,T) زمرة تبادلية ينبغي تحديد عنصرها المحايد J
0,5	**4-** أ) بين أن قانون التركيب الداخلي "T" توزيعي بالنسبة لقانون التركيب الداخلي "+" في E
0,5	ب) استنتج أن $(E,+,\mathrm{T})$ جسم تبادلي

التمرين الثاني : (3,5 ن)

ليكن m عددا عقديا غير منعدم.

<u>**الجزء الأول :**</u>

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E):\quad 2z^2-2(m+1+i)z+m^2+(1+i)m+i=0$

1- تحقق أن مميز المعادلة (E) هو : $\Delta=(2im)^2$	0,5
2- حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة (E)	0,5
<u>الجزء الثاني :</u> المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$	
نفارض أن $m\in\mathbb{C}\setminus\{0,1,i\}$ و نضع : $z_1=\frac{1+i}{2}(m+1)$ و $z_2=\frac{1-i}{2}(m+i)$	
نعتبر النقط A و B و M و M_1 و M_2 التي ألحاقها على التوالي 1 و i و m و z_1 و z_2	
1- أ) تحقق أن : $z_1=iz_2+1$	0,25
ب) بين أن M_1 هي صورة M_2 بالدوران الذي مركزه النقطة Ω ذات اللحق $\omega=\frac{1+i}{2}$ و قياس زاويته $\frac{\pi}{2}$	0,5
2- أ) تحقق من أن : $\frac{z_2-m}{z_1-m}=i\,\frac{m-1}{m-i}$	0,5
ب) بين أنه إذا كانت النقط M و M_1 و M_2 مستقيمية فإن M تنتمي إلى الدائرة (Γ) التي أحد أقطارها $[AB]$	0,5
ج) حدد مجموعة النقط M بحيث تكون النقط Ω و M و M_1 و M_2 متداورة . (لاحظ أن $\frac{z_1-\omega}{z_2-\omega}=i$)	0,75

التمرين الثالث : (3 ن)

نقبل أن 2017 عدد أولي و أن $2016=2^5 3^2 7$	
ليكن p عددا أوليا أكبر من أو يساوي 5	
1- ليكن الزوج (x,y) من $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ بحيث : $px+y^{p-1}=2017$	
أ) تحقق أن : $p<2017$	0,25
ب) بين أن : p لا يقسم y	0,5
ج) بين أن $y^{p-1}\equiv 1[p]$ ثم استنتج أن p يقسم 2016	0,75
د) بين أن : $p=7$	0,5
2- حدد ، حسب قيم p ، الأزواج (x,y) من $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ التي تحقق : $px+y^{p-1}=2017$	1

التمرين الرابع : (10 ن)

<u>الجزء الأول :</u> نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي :	
$f(0)=0$ و $(\forall x\in]0,+\infty[)\quad f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}$	
ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (نأخذ $\Vert\vec{i}\Vert=\Vert\vec{j}\Vert=2cm$)	
1- أ) بين أن الدالة f متصلة على اليمين في 0	0,25
ب) بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على اليمين في 0	0,5

ج) بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ ثم أحسب $f'(x)$ لكل x من المجال $]0,+\infty[$	0,5
2- أ) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم أول مبيانيا النتيجة المحصل عليها .	0,5
ب) اعط جدول تغيرات الدالة f	0,25
3- أ) بين أن المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف I يتم تحديدها .	0,75
ب) أرسم المنحنى (C). (نأخذ $f(1)\simeq 0,7$ و $4e^{-3}\simeq 0,2$)	0,5
الجزء الثاني : نعتبر الدالة العددية F المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي : $F(x)=\int_x^1 f(t)dt$	
1- بين أن الدالة F متصلة على المجال $[0,+\infty[$	0,25
2- أ) باستعمال طريقة المكاملة بالأجزاء بين أن : $$(\forall x\in]0,+\infty[)\quad \int_x^1 e^{-\frac{1}{t}}dt=e^{-1}-xe^{-\frac{1}{x}}-\int_x^1 \frac{1}{t}e^{-\frac{1}{t}}dt$$	0,5
ب) حدد $\int_x^1\left(1+\frac{1}{t}\right)e^{-\frac{1}{t}}dt$ لكل x من المجال $]0,+\infty[$	0,25
ج) بين أن : $\int_0^1 f(x)dx=e^{-1}$	0,5
3- أحسب بالسنتيمتر مربع (cm^2) مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) و المستقيمات ذات المعادلات : $x=0$ و $x=2$ و $y=0$	0,5
4- نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي : $u_n=F(n)-F(n+2)$	
أ) باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية ، بين أنه لكل عدد صحيح طبيعي n يوجد عدد حقيقي v_n من المجال $]n,n+2[$ بحيث : $$u_n=2\left(1+\frac{1}{v_n}\right)e^{-\frac{1}{v_n}}$$	0,5
ب) بين أن : $$(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad 2\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{-\frac{1}{n}}\leq u_n\leq 2\left(1+\frac{1}{n+2}\right)e^{-\frac{1}{n+2}}$$	0,25
ج) استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	0,25
الجزء الثالث :	
1- أ) بين أنه لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n يوجد عدد حقيقي موجب قطعا وحيد a_n بحيث : $f(a_n)=e^{-\frac{1}{n}}$	0,5
ب) بين أن المتتالية $(a_n)_{n\geq 1}$ تزايدية	0,25
ج) تحقق أن : $$(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad -\frac{1}{a_n}+\ln\left(1+\frac{1}{a_n}\right)=-\frac{1}{n}$$	0,25
2- أ) بين أن : $$(\forall t\in[0,+\infty[)\quad 1-t\leq\frac{1}{1+t}\leq 1-t+t^2$$	0,25
ب) بين أن : $$(\forall x\in[0,+\infty[)\quad -\frac{x^2}{2}\leq -x+\ln(1+x)\leq -\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$$	0,5

3- ليكن n **عددا صحيحا طبيعيا أكبر من أو يساوي** 4	
أ) تحقق أن $a_4 \geq 1$ **ثم استنتج أن :** $a_n \geq 1$ **(نقبل أن :** $e^{\frac{3}{4}} \geq 2$ **)**	0,5
ب) بين أن : $1 - \dfrac{2}{3a_n} \leq \dfrac{2a_n^2}{n} \leq 1$ **(يمكنك استعمال السؤالين 1-ج) و 2-ب) من الجزء الثالث)**	0,5
ج) بين أن : $\sqrt{\dfrac{n}{6}} \leq a_n$ **(يمكنك استعمال السؤالين 3-أ) و 3-ب)) ثم استنتج** $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$	0,5
د) حدد : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n\sqrt{\dfrac{2}{n}}$	0,5