Yassine Mghazli

التمرين الاول

-1 $E \subset M_3(\mathbb{R})$ و $E \neq \varnothing$ (لأن $0_{M_3(\mathbb{R})} = M(0,0) \in E$)

و لدينا

$$\left(\forall \left(M(x,y), M(a,b)\right) \in E^2\right); M(x,y) - M(a,b) = \begin{pmatrix} x+y & 0 & -2y \\ 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & x-y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a+b & 0 & -2b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & a-b \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (x-a)+(y-b) & 0 & -2(y-b) \\ 0 & 0 & 0 \\ y-b & 0 & (x-a)-(y-b) \end{pmatrix}$$

$$= M(x-a, y-b) \in E$$

إذن

$$\boxed{E \text{ زمرة جزئية للزمرة } \left(M_3(\mathbb{R}), +\right)}$$

-2 لدينا

$$\left(\forall \left(M(x,y), M(x',y')\right) \in E^2\right); M(x,y) \times M(x',y') = \begin{pmatrix} x+y & 0 & -2y \\ 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & x-y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x'+y' & 0 & -2y' \\ 0 & 0 & 0 \\ y' & 0 & x'-y' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (x+y)(x'+y')-2yy' & 0 & -2y'(x+y)-2y(x'-y') \\ 0 & 0 & 0 \\ y(x'+y')+y'(x-y) & 0 & -2yy'+(x-y)(x'-y') \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} xx'+xy'+yx'-yy' & 0 & -2(xy'+yx') \\ 0 & 0 & 0 \\ xy'+yx' & 0 & xx'-yy'-xy'-yx' \end{pmatrix}$$

$$= M(xx'-yy', xy'+yx')$$

إذن

$$\boxed{\left(\forall \left(M(x,y), M(x',y')\right) \in E^2\right); M(x,y) \times M(x',y') = M(xx'-yy', xy'+yx')}$$

Yassine Mghazli

-3 أ) $z=x+iy$ و $z'=x'+iy'$ / $\left(\forall(z,z')\in(\mathbb{C}^*)^2\right);\exists!\left((x,y),(x',y')\in\left(\mathbb{R}-\{(0,0)\}\right)^2\right)$

لدينا

$$\varphi(z\times z')=\varphi\left((x+iy)(x'+iy')\right)$$
$$=\varphi\left(xx'-yy'+i(xy'+yx')\right)$$
$$=M(xx'-yy',xy'+yx')$$
$$=M(x,y)\times M(x',y')$$
$$=\varphi(z)\times\varphi(z')$$

إذن

$\boxed{\left(\forall(z,z')\in(\mathbb{C}^*)^2\right)\ \varphi(z\times z')=\varphi(z)\times\varphi(z')}$ و منه φ تشاكل من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(E,\times)$

ب) بما أن $(\mathbb{C}^*,\times)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد 1 و φ تشاكل من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(E,\times)$

فإن $(\varphi(\mathbb{C}^*),\times)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد $\varphi(1)$ و بما أن $\varphi(\mathbb{C}^*)=E^*$ و $\varphi(1)=\varphi(1+0i)=M(1,0)$

فإن

$(E^*,\times)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد $M(1,0)$

-4 لدينا $(E^*,\times)$ زمرة تبادلية و E زمرة جزئية للزمرة $(M_3(\mathbb{R}),+)$ إذن $(E,+)$ زمرة تبادلية

ولدينا حسب السؤال 2- E جزء مستقر من $(M_3(\mathbb{R}),\times)$ إذن $\times$ توزيعي على $+$ في E

نستنتج أن

$(E,+,\times)$ جسم تبادلي

-5 أ) لدينا
$$\left(\forall M(x,y)\in E\right);A\times M(x,y)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x+y&0&-2y\\0&0&0\\y&0&x-y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\left(\forall M(x,y)\in E\right);A\times M(x,y)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}}$$

Yassine Mghazli

ب) نفترض أن ل $M(x,y)$ مماثلا في $(M_3(\mathbb{R}),\times)$ هو M^{-1}

$$A\times M(x,y)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow (A\times M(x,y))\times M^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\times M^{-1}$$

$$\Rightarrow A\times(M(x,y)\times M^{-1})=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

و هذا تناقض ومنه

$\boxed{\text{جميع عناصر } E \text{ لا تقبل مقلوبا في } (M_3(\mathbb{R}),\times)}$

التمرين الثاني

الجزء الاول

-1 لدينا $a^3+b^3\equiv 0[173]\Leftrightarrow 173|a^3+b^3$ إذن $a^3\equiv -b^3[173]$ و منه $(a^3)^{57}\equiv(-b^3)^{57}[173]$

و بالتالي

$\boxed{a^{171}\equiv -b^{171}[173]}$

-2 لدينا 173 أولي و $173|a$ إذن $(173|a^3\Leftrightarrow 173|a)$ و $(173|\mathrm{b}^3\Leftrightarrow 173|\mathrm{b})$

و بما أن $173|a^3+b^3$ فإن $(173|a^3\Leftrightarrow 173|\mathrm{b}^3)$

نستنتج أن

$\boxed{173|a\Leftrightarrow 173|\mathrm{b}}$

-3 لدينا $(173|a\Rightarrow 173|b)$ و $(173|a$ ومنه $(173|\mathrm{b}$ و $173|a)$

نستنتج أن

$\boxed{173|a+b}$

-4 أ) لدينا 173 لايقسم a إذن حسب-2 173لايقسم b ومنه حسب مبرهنة فرما الصغرى $a^{172}\equiv 1[173]$ و $b^{172}\equiv 1[173]$

نستنتج أن

$\boxed{a^{172}\equiv b^{172}[173]}$

ب) لدينا $a^{171}\equiv -b^{171}[173]$ و $a^{172}\equiv b^{172}[173]$ إذن $a^{172}\equiv -ba^{171}[173]$ ومنه

$\boxed{a^{171}(a+b)\equiv 0[173]}$

ج) بما أن 173 لايقسم a فإن 173 لايقسم a^{171} و بما أن 173 أولي فإن $173\wedge a^{171}=1$ و بما أن $173|a^{171}(a+b)$

فإن حسب مبرهنة كوص

$\boxed{173|a+b}$

Yassine Mghazli

الجزء الثاني

1- لكل x و y و k من $\mathbb{N}^*$ لدينا :

$$\begin{cases} x+y=173k \\ x^3+y^3=173(xy+1) \end{cases} \Rightarrow (x^2-xy+y^2)173k=173(xy+1)$$

$$\Rightarrow k\left((x-y)^2+xy\right)=(xy+1)$$

$$\Rightarrow k(x-y)^2=1+xy(1-k)$$

$$\Rightarrow k(x-y)^2+(k-1)xy=1$$

إذن

$$\boxed{k(x-y)^2+(k-1)xy=1}$$

2- نفترض أن $k\neq 1$ حسب السؤال السابق لدينا $k(x-y)^2+(k-1)xy=1$

إذن $(*)\, k(x-y)^2=1-(k-1)xy$

وبما أن x و y و k من $\mathbb{N}^*$ فإن $k\geq 2$ و $xy\geq 1$ و منه $(k-1)xy\geq 1$ ما يستلزم أن $k(x-y)^2\leq 0$

أي أن $x=y$ المعادلة $(*)$ تصبح $(k-1)xy=1$ ما يستلزم أن $k-1=x=y=1$ و هذا تناقض مع كون $x+y=173k\geq 173$ إذن الافتراض الأول خاطئ وعكسه هو الصحيح: $\boxed{k=1}$

لدينا

$$(E)\Rightarrow \begin{cases} (x-y)^2=1 \\ x+y=173 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{cases} (x-y)=1 \\ x+y=173 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} (x-y)=-1 \\ x+y=173 \end{cases} \right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{cases} 2x=174 \\ 2y=172 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} 2x=172 \\ 2y=174 \end{cases} \right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{cases} x=87 \\ y=86 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x=86 \\ y=87 \end{cases} \right)$$

وعكسا لدينا $87^3+86^3=(86+87)(87^2-87\times 86+86^2)=173(87+86^2)=173(1+86\times 87)$

مجموعة حلول المعادلة (E) هي إذن

$$\boxed{S=\{(87,86);(86,87)\}}$$

Yassine Mghazli

التمرين الثالث

1- أ) لدينا $\frac{z_1-z}{z_2-z}\times\frac{z_2}{z_1}=\frac{z_1z_2-zz_2}{z_1z_2-zz_1}=\frac{\frac{1}{2}\left(z\left(z_1+z_2\right)-2zz_2\right)}{\frac{1}{2}\left(z\left(z_1+z_2\right)-2zz_1\right)}=\frac{z\left(z_1-z_2\right)}{z\left(z_2-z_1\right)}=-1$

إذن

$$\boxed{\frac{z_1-z}{z_2-z}\times\frac{z_2}{z_1}=-1}$$

ب) بما أن النقط O و M و M_1 و M_2 غير مستقيمية و $\frac{z_1-z}{z_2-z}\times\frac{z_2-0}{z_1-0}\in\mathbb{R}$ فإنها نقط متداورة ومنه

$\boxed{\text{النقطة } M \text{ تنتمي للدائرة المحيطة بالمثلث } OM_1M_2}$

2- لدينا $\overline{z}=\frac{2\overline{z_2}\,\overline{z_1}}{\overline{z_2}+\overline{z_1}}=\frac{2\overline{z_1}\,\overline{z_2}}{\overline{z_1}+\overline{z_2}}=\frac{2z_2z_1}{z_2+z_1}=z$ لأن $\left(z_2=\overline{z_1}\quad z_1=\overline{z_2}\right)$ و $\overline{z}=\frac{2z_1z_2}{z_1+z_2}$

إذن $\overline{z}=z$ ومنه $z\in\mathbb{R}$ نستنتج أن

$\boxed{M \text{ تنتمي للمحور الحقيقي}}$

3- أ) الصيغة العقدية الدوران الذي مركزه O و زاويته α هي: $z'=e^{i\alpha}z$ وبما أن صورة M_1 بهذا الدوران هي M_2 فإن

$$\boxed{z_2=e^{i\alpha}z_1}$$

ب) بما أن z_1 و z_2 مترافقين فإن M_1 و M_2 مثماثلين بالنسبة للمحور الحقيقي و منه منتصف القطعة $[M_1M_2]$ ينتمي للمحور الحقيقي

و بما أن $OM_1=OM_2$ فإن واسط القطعة $[M_1M_2]$ هو المحور الحقيقي نستنتج حسب السؤال 2- أن

$\boxed{M \text{ تنتمي لواسط القطعة } [M_1M_2]}$

4- أ) z_1 و z_2 حلي المعادلة $6t^2-\left(e^{i\theta}+1\right)t+\left(e^{i\theta}-1\right)=0$ إذن $z_1+z_2=\frac{e^{i\theta}+1}{6}$ و $z_1z_2=\frac{e^{i\theta}-1}{6}$

إذن $z=\frac{2z_1z_2}{z_1+z_2}=2\frac{\frac{e^{i\theta}-1}{6}}{\frac{e^{i\theta}+1}{6}}=2\frac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}$ و منه: $\boxed{z=2\frac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}}$

Yassine Mghazli

ب) لدينا $z = 2\dfrac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1} = 2\dfrac{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}}-e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)}{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}}+e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)} = 2\dfrac{2i\sin\frac{\theta}{2}}{2\cos\frac{\theta}{2}} = 2i\tan\dfrac{\theta}{2}$

وبما أن $\theta \in]0,\pi[$ فإن $\dfrac{\theta}{2} \in \left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ و منه $\tan\dfrac{\theta}{2} > 0$ نستنتج أن الشكل المثلثي ل z هو

$$\boxed{z = \left[2\tan\frac{\theta}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}$$

التمرين الرابع

الجزء الأول

1- لكل x من $]0,+\infty[$ الدالة $\varphi : t \to e^{-t}$ متصلة على $[0,x]$ و قابلة للاشتقاق على $]0,x[$ إذن حسب مبرهنة التزايدات المنتهية

يوجد θ من $]0,x[$ بحيث $\dfrac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0} = \varphi'(\theta)$ و بالتعويض نحصل على $\dfrac{e^{-x}-1}{x} = -e^{-\theta}$ ومنه $\dfrac{x}{1-e^{-x}} = e^{\theta}$

$$\boxed{(\forall x \in]0+\infty+\infty[);(\exists \theta \in]0,x[)/\ e^{\theta} = \frac{x}{1-e^{-x}}}$$

2- أ) و ب) لدينا $(\forall x>0);0<\theta<x \Rightarrow 1<e^{\theta}<e^{x} \Rightarrow 1<\dfrac{x}{1-e^{-x}}<e^{x}$

$$\overset{(1-e^{-x}>0)}{\Longrightarrow} 1-e^{-x}<x<e^{x}\left(1-e^{-x}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1-e^{-x}<x \\ x<e^{x}-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1-x<e^{-x} \\ x+1<e^{x} \end{cases}$$

إذن

$$\boxed{(\forall x>0);x+1<e^{x} \quad \text{و} \quad (\forall x>0);1-x<e^{-x}}$$

ج) لدينا $(\forall x>0);0<\theta<x \Rightarrow 1<e^{\theta}<e^{x} \Rightarrow 1<\dfrac{x}{1-e^{-x}}<e^{x}$

$$\Rightarrow 1<\frac{xe^{x}}{e^{x}-1}<e^{x} \Rightarrow 0<\ln\left(\frac{xe^{x}}{e^{x}-1}\right)<x$$

(لأن الدالة ln تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$) و منه

$$\boxed{(\forall x>0);0<\ln\left(\frac{xe^{x}}{e^{x}-1}\right)<x}$$

Yassine Mghazli

الجزء الثاني

-1 أ) لدينا $\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{xe^x}{e^x-1}=\lim_{x\to0} e^x\frac{1}{\frac{e^x-1}{x}}=1\times\frac{1}{1}=1=f(1)$

$\boxed{\text{إذن } f \text{ متصلة على اليمين في } 0}$

ب) لدينا $\lim_{x\to+\infty} f(x)-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^x}{e^x-1}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{e^x}{x}-\frac{1}{x}}=0$ لأن $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}-\frac{1}{x}=+\infty$

$\boxed{\text{إذن } \lim_{x\to+\infty} f(x)-x=0 \text{ ومنه ل } (C) \text{ مقارب مائل بجوار } +\infty \text{ معادلته } y=x}$

-2 أ) لدينا حسب 2-أ)من الجزء الأول: $(\forall t>0);1-t<e^{-t}$ إذن $(\forall t\geq0);1-t\leq e^{-t}$

إذن $(\forall x\geq0);\int_0^x(1-t)\,dt\leq\int_0^x e^{-t}dt$

يستلزم $(\forall x\geq0);\left[t-\frac{t^2}{2}\right]_0^x\leq\left[-e^{-t}\right]_0^x$

ومنه

$$\boxed{(\forall x\geq0);x-\frac{x^2}{2}\leq-e^{-x}+1}$$

ب) لدينا

$$(\forall x\geq0);x-\frac{x^2}{2}\leq-e^{-x}+1\Rightarrow(\forall x\geq0);\begin{cases}e^{-x}+x-1\leq\frac{x^2}{2}\\ \int_0^x t-\frac{t^2}{2}dt\leq\int_0^x\left(-e^{-t}+1\right)dt\end{cases}$$

$$\Rightarrow(\forall x>0);\begin{cases}e^{-x}+x-1\leq\frac{x^2}{2}\\ \left[\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{6}\right]_0^x\leq\left[e^{-t}+t\right]_0^x\end{cases}$$

$$\Rightarrow(\forall x>0);\begin{cases}e^{-x}+x-1\leq\frac{x^2}{2}\\ \frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\leq e^{-x}+x-1\end{cases}$$

Yassine Mghazli

ومنه

$$\boxed{(\forall x>0);\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\leq e^{-x}+x-1\leq\frac{x^2}{2}}$$

3- أ) لدينا

$$(\forall x>0);\frac{f(x)-1}{x}=\frac{\frac{xe^x}{e^x-1}-1}{x}$$
$$=\frac{xe^x-e^x-1}{x(e^x-1)}$$
$$=\frac{x}{x^2(e^x-1)}\times e^x(x-1-e^{-x})$$
$$=\frac{f(x)}{x^2}(x-1-e^{-x})$$

إذن

$$\boxed{(\forall x>0);\frac{f(x)-1}{x}=\frac{x-1-e^{-x}}{x^2}f(x)}$$

ب) لدينا

$$(\forall x>0);\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\leq e^{-x}+x-1\leq\frac{x^2}{2}\Rightarrow(\forall x>0);\frac{1}{2}-\frac{x}{6}\leq\frac{e^{-x}+x-1}{x^2}\leq\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow(\forall x>0);\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{6}\right)f(x)\leq\frac{e^{-x}+x-1}{x^2}f(x)\leq\frac{1}{2}f(x)$$
$$\Rightarrow(\forall x>0);\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{6}\right)f(x)\leq\frac{f(x)-1}{x}\leq\frac{1}{2}f(x)$$

وبما أن $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{6}\right)f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{2}f(x)=\frac{1}{2}f(0)=\frac{1}{2}$

فإن

$$\boxed{\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-1}{x}=\frac{1}{2}\quad \text{ومنه}\quad f\quad \text{قابلة للاشتقاق على اليمين في}\quad 0\quad \text{و}\quad f_d'(0)=\frac{1}{2}}$$

4- أ) الدوال $x\to x$ و $x\to e^x$ و $x\to1$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و بالخصوص على $]0,+\infty[$ إذن الدالتين $x\to xe^x$ و $x\to e^x-1$ قابلتين للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و بما أن $(\forall x>0);e^x-1\neq0$

فإن الدالة $x\to\frac{xe^x}{e^x-1}$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$

Yassine Mghazli

خلاصة

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$

لدينا

$$
\begin{aligned}
(\forall x>0);\ f'(x) &= \frac{(e^x+xe^x)(e^x-1)-xe^xe^x}{(e^x-1)^2} \\
&= \frac{e^x}{(e^x-1)^2}\left((x+1)(e^x-1)-xe^x\right) \\
&= \frac{e^x}{(e^x-1)^2}\left(xe^x-x+e^x-1-xe^x\right) \\
&= \frac{e^x}{(e^x-1)^2}\left(e^x-x-1\right)
\end{aligned}
$$

إذن

$$
(\forall x>0);\ f'(x)=\frac{e^x}{(e^x-1)^2}(e^x-x-1)
$$

ب) حسب السؤال 2- ب) من الجزء الأول لدينا $(\forall x>0); x+1<e^x$

إذن $(\forall x>0); e^x-x-1>0$ و منه $(\forall x>0);\ f'(x)>0$

نستنتج أن الدالة f تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$

الجزء الثالث

1- برهان بالترجع على العلاقة "$(\forall n\in\mathbb{N}); u_n>0$"

لدينا $u_0>0$ إذن العلاقة صحيحة من اجل $n=0$

ليكن n من $\mathbb{N}$ نفترض أن $u_n>0$ و نبين ان $u_{n+1}>0$

$n\in\mathbb{N}; u_n>0 \Rightarrow f(u_n)>f(0) \Rightarrow \ln(f(u_n))>\ln(f(0))$ (لأن f و $\ln$ تزايديتين قطعا على $]0,+\infty[$
)

و بما أن $\ln(f(0))=\ln(1)=0$ فإن $u_{n+1}>0$

حسب مبدأ الترجع نستنتج أن

$$(\forall n\in\mathbb{N}); u_n>0$$

Yassine Mghazli

-2 لدينا حسب السؤال 2- ج) $(\forall x>0);0<\ln\left(\frac{xe^x}{e^x-1}\right)<x$

وبما أن $(\forall n\in\mathbb{N});u_n>0$ فإن $(\forall n\in\mathbb{N});0<\ln\left(\frac{u_ne^{u_n}}{e^{u_n}-1}\right)<u_n$

نستنتج أن $(\forall n\in\mathbb{N});0<\ln\left(f\left(u_n\right)\right)<u_n$ وبالتالي $(\forall n\in\mathbb{N});0<u_{n+1}<u_n$

إذن

المتتالية (u_n) تناقصية قطعا و بما أنها مصغورة ب 0 فهي إذن متقاربة

-3 لدينا $(\forall x>0);e^x>x+1\Leftrightarrow e^x-1>x\Leftrightarrow\frac{x}{e^x-1}<1\Leftrightarrow\frac{xe^x}{e^x-1}<e^x\Leftrightarrow f(x)<e^x\Leftrightarrow\ln\left(f(x)\right)<x$

و $\ln\left(f(0)\right)=0$

إذن $\begin{cases}(\forall x>0);\ln\left(f(x)\right)\neq x\\ \ln\left(f(0)\right)=0\end{cases}$ و منه

0 هو الحل الوحيد للمعادلة $\ln\left(f(x)\right)=x$

المتتالية (u_n) متقاربة و الدالة $\ln\circ f$ متصلة على $]0,+\infty[$ وتحقق $\ln\circ f\left(]0,+\infty[\right)\subset]0,+\infty[$

إذن نهايتها l تحقق المعادلة $\ln\left(f(l)\right)=l$ التي تقبل حلا وحيدا هو 0 نستنتج أن

$\lim u_n=0$

التمرين الخامس

-1 أ) لدينا $(\forall t\in]0,+\infty[);\frac{1}{\sqrt{e^t-1}}>0$

إذن $(\forall x\in]0,\ln 2[);\int_{\ln 2}^{x}\frac{1}{\sqrt{e^t-1}}dt<0$ و $(\forall x\in]\ln 2,+\infty[);\int_{\ln 2}^{x}\frac{1}{\sqrt{e^t-1}}dt>0$

و منه إشارة $F(x)$ كما يلي

$F(x)$ موجبة قطعا على المجال $]\ln 2,+\infty[$

$F(x)$ سالبة قطعا على المجال $]0,\ln 2[$ و $F(\ln 2)=0$

Yassine Mghazli

ب) الدالة F هي أصلية الدالة $x \to \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}$ على $]0,+\infty[$ و التي تنعدم عند $\ln 2$

إذن F قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و لدينا

$$\boxed{(\forall x \in]0,+\infty[); F'(x) = \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}}$$

ج) لدينا $0 < (\forall x \in]0,+\infty[); F'(x) = \frac{1}{\sqrt{e^x-1}} > 0$ إذن

$\boxed{\text{الدالة } F \text{ تزايدية قطعا على }]0,+\infty[}$

2- أ) بوضع $u = \sqrt{e^t-1}$ يكون لدينا

$$\begin{cases} du = \frac{e^t}{2u}dt = \frac{u^2+1}{2u}dt \Leftrightarrow dt = \frac{2u}{u^2+1}du \\ t = x \Leftrightarrow u = \sqrt{e^x 91} \\ t = \ln 2 \Leftrightarrow u = 1 \end{cases}$$

ومنه

$$\int_{\ln 2}^{x} \frac{1}{\sqrt{e^t-1}}dt = \int_1^{\sqrt{e^x-1}} \frac{1}{u}\frac{2u}{u^2+1}du = \int_1^{\sqrt{e^x-1}} \frac{2}{u^2+1}du$$

$$= 2[arc\tan]_1^{\sqrt{e^x-1}} = 2\left(arc\tan\left(\sqrt{e^x-1}\right) - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 2arc\tan\left(\sqrt{e^x-1}\right) - \frac{\pi}{2}$$

إذن

$$\boxed{\int_{\ln 2}^{x} \frac{1}{\sqrt{e^t-1}}dt = 2arc\tan\left(\sqrt{e^x-1}\right) - \frac{\pi}{2}}$$

ب) لدينا $\lim_{x\to 0^+} F(x) = \lim_{x\to 0^+} 2arc\tan\left(\sqrt{e^x-1}\right) - \frac{\pi}{2} = 2\arctan(0) - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$

و $\lim_{x\to +\infty} F(x) = \lim_{x\to +\infty} 2arc\tan\left(\sqrt{e^x-1}\right) - \frac{\pi}{2} = 2\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

Yassine Mghazli

ومنه

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} F(x)=\frac{\pi}{2} \text{ و } \lim_{x\to0^+} F(x)=-\frac{\pi}{2}}$$

3- أ) F قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ إذن متصلة عليه و بما أنها تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$

فهي إذن تقابل من $]0,+\infty[$ نحو $F(]0,+\infty[)$

و لدينا $F(]0,+\infty[)=\left]\lim_{x\to0^+}F(x),\lim_{x\to+\infty}F(x)\right[=\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

إذن

$$\boxed{F \text{ تقابل من }]0,+\infty[\text{ نحو } \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[}$$

ب) $(\forall y\in]0,+\infty[);\left(\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\right)\ F(y)=x \Leftrightarrow 2\arctan\left(\sqrt{e^y-1}\right)-\frac{\pi}{2}=x$

$$\Leftrightarrow \arctan\left(\sqrt{e^y-1}\right)=\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{e^y-1}=\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow e^y=1+\tan^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow y=\ln\left(1+\tan^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

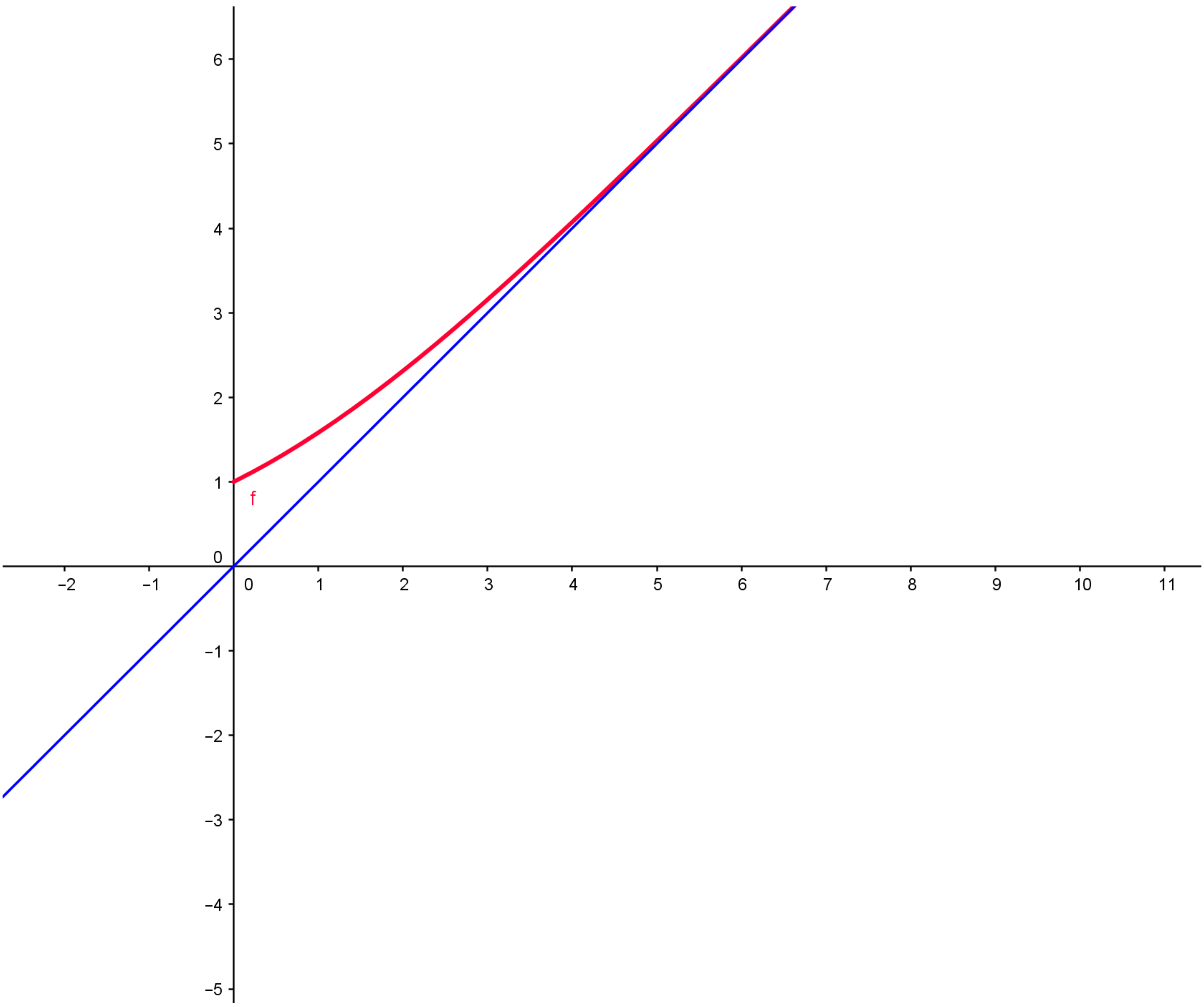
ومنه

$$\boxed{F \text{ تقابل من }]0,+\infty[\text{ نحو } \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\text{ و } \forall x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[;F^{-1}(x)=\ln\left(1+\tan^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)}$$

Yassine Mghazli

إضافة

مبيان الدالة f



مبيان الدالة F