السنة 2 بكالوريا علوم رياضية	تصحيح الامتحان الوطني 2015 الدورة العادية	امتحانات وطنية

تمرين 1 :

$$(E):\ z^2-\left(5+i\sqrt{3}\right)z+4+4i\sqrt{3}=0$$

1

أ) $\Delta=\left(5+i\sqrt{3}\right)^2-4\left(4+4i\sqrt{3}\right)=25+10i\sqrt{3}-3-16-16i\sqrt{3}=6-6i\sqrt{3}=9-6i\sqrt{3}-3=\left(3-i\sqrt{3}\right)^2$

ب) $a=\dfrac{5+i\sqrt{3}-3+i\sqrt{3}}{2}=1+i\sqrt{3}$ ، $b=\dfrac{5+i\sqrt{3}+3-i\sqrt{3}}{2}=4$

ج) لدينا : $a\left(1-i\sqrt{3}\right)=\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(1-i\sqrt{3}\right)=1+3=4=b$ إذن : $b=\left(1-i\sqrt{3}\right)a$

2

أ) الصيغة العقدية للدوران $R\left(A,\dfrac{\pi}{2}\right)$ هي : $z'=e^{\frac{\pi}{2}i}(z-a)+a=i(z-a)+a$ ، بما أن $B_1=R(O)$ فإن :

$b_1=i(0-a)+a=-i\,a+a=-i\left(1+i\sqrt{3}\right)+1+i\sqrt{3}=-i-\sqrt{3}+1+i\sqrt{3}=1-\sqrt{3}+i\left(\sqrt{3}-1\right)$

ب) الصيغة العقدية للتحاكي h هي : $z'=k(z-a)+a=\sqrt{3}(z-a)+a$

لتكن $B_1'=R(B_1)$ إذن : $b_1'=\sqrt{3}(b_1-a)+a=\sqrt{3}(-i\,a)+a=a\left(1-i\sqrt{3}\right)=b$

إذن $B_1'=B$ منه : $B=R(B_1)$

ج) لدينا : $\dfrac{b}{b-a}=\dfrac{b}{a-i\sqrt{3}a-a}=\dfrac{b}{-a\sqrt{3}i}=\dfrac{\frac{b}{a}}{-\sqrt{3}i}=\dfrac{1-i\sqrt{3}}{-\sqrt{3}i}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\dfrac{\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}{-i}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\dfrac{e^{\frac{-\pi}{3}i}}{e^{\frac{-\pi}{2}i}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}e^{\frac{\pi}{6}i}$

بالتالي : $\arg\left(\dfrac{b}{b-a}\right)\equiv\dfrac{\pi}{6}[2\pi]$

د) بما أن C تنتمي إلى الدائرة المحيطة بالمثلث OAB فإن النقط O و A و B و C متداورة

منه : $\dfrac{c-0}{c-a}\div\dfrac{b-0}{b-a}\in IR$ منه : $\arg\left(\dfrac{c-0}{c-a}\div\dfrac{b-0}{b-a}\right)\equiv0[\pi]$ منه : $\arg\left(\dfrac{c}{c-a}\right)-\arg\left(\dfrac{b}{b-a}\right)\equiv0[\pi]$

منه : $\arg\left(\dfrac{c}{c-a}\right)\equiv\dfrac{\pi}{6}[\pi]$

تمرين 2 : $x^{1439}\equiv1436[2015]$

1 بما أن : $1436\times1051-2015\times749=1$ فحسب مبرهنة بيزو «Bezout» فإن : $1436\wedge2015=1$

2

أ) لدينا : $x^{1439}\equiv1436[2015]$ إذن : $x^{1439}-2015k=1436$ / $\exists k\in Z$

لدينا d/x و $d/2015$ منه: d/x^{1436} و $d/2015k$ منه : $d/x^{1439}-2015k$ بالتالي : $d/1436$

ب) نضع : $x\wedge2015=d$ ، إذن d/x و $d/2015$ إذن حسب السؤال السابق : $d/1436$

إذن : $d/1436\times1051$ و لدينا : $d/2015$ إذن : $d/2015\times749$ إذن : $d/1436\times1051-2015\times749$

منه : $d/1$ ، و بما أن : $d>0$ فإن : $d=1$ ، بالتالي : $x\wedge2015=1$

3

أ) لدينا : $2015=5\times13\times31$ ، بما أن : $x\wedge2015=1$ فإن : $x\wedge(5\times13\times31)=1$ إذن : $\begin{cases}x\wedge5=1\\x\wedge13=1\\x\wedge31=1\end{cases}$

إذن حسب مبرهنة فيرما نستنتج أن : $\begin{cases}x^4\equiv1[5]\\x^{12}\equiv1[13]\\x^{30}\equiv1[31]\end{cases}$ منه : $\begin{cases}\left(x^4\right)^{360}\equiv1[5]\\\left(x^{12}\right)^{120}\equiv1[13]\\\left(x^{30}\right)^{48}\equiv1[31]\end{cases}$ بالتالي : $\begin{cases}x^{1404}\equiv1[5]\\x^{1404}\equiv1[13]\\x^{1404}\equiv1[31]\end{cases}$

ب) لدينا : $\begin{cases} x^{1404} \equiv 1[5] \\ x^{1404} \equiv 1[13] \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} 5 / x^{1404}-1 \\ 13 / x^{1404}-1 \end{cases}$ منه : $(5 \vee 13) / x^{1404}-1$ أي : $65 / x^{1404}-1$ أي : $x^{1404} \equiv 1[65]$

مرة أخرى لدينا : $\begin{cases} x^{1404} \equiv 1[65] \\ x^{1404} \equiv 1[31] \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} 65 / x^{1404}-1 \\ 31 / x^{1404}-1 \end{cases}$ منه : $(65 \vee 31) / x^{1404}-1$ أي : $2015 / x^{1404}-1$

أي : $x^{1404} \equiv 1[2015]$

4 لدينا : $x^{1439} \equiv 1436[2015]$ منه : $x^{1440} \equiv 1436\, x[2015]$ و لدينا : $x^{1404} \equiv 1[2015]$

إذن : $1436\, x \equiv 1[2015]$ منه : $1436\, x-2015\sim=1$ / $\exists \sim \in Z$

منه : $1436\, x-2015\sim=1436 \times 1051-2015 \times 749$ منه : $1436(x-1051)=2015(\sim-749)$

منه : $2015/1436(x-1051)$ ، و بما أن : $2015 \wedge 1436=1$ فإن $2015/(x-1051)$ أي : $x \equiv 1051[2015]$

تمرين 3 :

$$M(x)=\begin{pmatrix} 1-x & x \\ -2x & 1+2x \end{pmatrix} \quad ، \quad E=\{M(x) \,/\, x \in IR\} \quad ، \quad \forall(x, y) \in IR^{2} \quad M(x) \mathrm{T} M(y)=M(x+y+1)$$

$$\text{¨}: \; IR \rightarrow E$$
$$x \mapsto \text{¨}(x)=M(x-1)$$

1 أ) لدينا : $\forall(x, y) \in IR^{2} \quad \text{¨}(x+y)=M(x+y-1)$

و $\forall(x, y) \in IR^{2} \quad \text{¨}(x) \mathrm{T}\, \text{¨}(y)=M(x-1) \mathrm{T} M(y-1)=M(x-1+y-1+1)=M(x+y-1)$

إذن : $\text{¨}(x+y)=\text{¨}(x) \mathrm{T}\, \text{¨}(y)$ ، $\forall(x, y) \in IR^{2}$ إذن : ¨ تشاكل من $(IR,+)$ نحو (E, T)

ب) لدينا $\text{¨}(x+1)=M(x)$ $\forall x \in IR$ إذن $\text{¨}(m)=M$ / $\forall M \in E \;\exists m \in IR$ أي أن ¨ شمول أي : $\text{¨}(IR)=E$

إذن و بما أن : $(IR,+)$ زمرة تبادلية فإن (E, T) زمرة تبادلية عنصرها الحايد هو: $\text{¨}(0)=M(-1)$

2 أ) لدينا لكل $(x, y) \in IR^{2}$:

$$M(x) \times M(y)=\begin{pmatrix} 1-x & x \\ -2x & 1+2x \end{pmatrix} \times\begin{pmatrix} 1-y & y \\ -2y & 1+2y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (1-x)(1-y)-2xy & y(1-x)+x(1+2y) \\ -2x(1-y)-2y(1+2x) & -2xy+(1+2x)(1+2y) \end{pmatrix}$$

$$M(x) \times M(y)=\begin{pmatrix} 1-x-y+xy-2xy & y-xy+x+2xy \\ -2x+2xy-2y-4xy & -2xy+1+2y+2x+4xy \end{pmatrix}$$

$$M(x) \times M(y)=\begin{pmatrix} 1-x-y-xy & y+x+xy \\ -2x-2y-2xy & 1+2y+2x+2xy \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1-(x+y+xy) & y+x+xy \\ -2(x+y+xy) & 1+2(x+y+xy) \end{pmatrix}$$

$$M(x) \times M(y)=M(x+y+xy)$$

ب) بما أن : $(x, y) \in IR^{2} \Rightarrow x+y+xy \in IR$

فإن : $(M(x), M(y)) \in E^{2} \Rightarrow M(x+y+xy) \in E \Rightarrow M(x) \times M(y) \in E$

إذن E جزء مستقر من $(M_{2}(IR), \times)$ ، ولدينا أيضا :

$\forall(x, y) \in IR^{2} \quad M(x) \times M(y)=M(x+y+xy)=M(y+x+yx)=M(y) \times M(x)$

أي أن القانون $\times$ تبادلي

ج) لدينا : لكل $(x, y, z) \in IR^{3}$:

$$M(x) \times(M(y) \mathrm{T} M(z))=M(x) \times M(y+z+1)=M(x+y+z+1+x(y+z+1))$$
$$M(x) \times(M(y) \mathrm{T} M(z))=M(2x+y+z+xy+xz+1)$$

و

$$(M(x) \times M(y)) \mathrm{T}(M(x) \mathrm{T} M(z))=M(x+y+xy) \mathrm{T} M(x+z+xz)=M(x+y+xy+x+z+xz+1)$$
$$(M(x) \times M(y)) \mathrm{T}(M(x) \mathrm{T} M(z))=M(2x+y+z+xy+xz+1)$$

منه : $M(x) \times(M(y) \mathrm{T} M(z))=(M(x) \times M(y)) \mathrm{T}(M(x) \mathrm{T} M(z))$

و لكون القانونين $\times$ و T تبادليان فإن : $(M(y) \mathrm{T} M(z)) \times M(x)=(M(y) \times M(x)) \mathrm{T}(M(z) \mathrm{T} M(x))$

إذن : $\times$ توزيعي بالنسبة لـ T في E

د) لدينا : $\forall x \in IR \quad M(x) \mathrm{T} M(-1)=M(-1) \mathrm{T} M(x)=M(x-1+1)=M(x)$

إذن $M(-1)$ هي العنصر المحايد في (E,T)

ولدينا: $M(0)=I$ ، و $\forall x\in IR \quad M(x)\times M(0)=M(0)\times M(x)=M(x+0+0)=M(x)$

إذن : I هي العنصر المحايد في $(E,\times)$

3 أ) لدينا : $(\forall x\in IR-\{-1\}\ )\ M(x)\times M\left(\dfrac{-x}{1+x}\right)=M\left(x-\dfrac{x}{1+x}-\dfrac{x^2}{1+x}\right)=M\left(\dfrac{x+x^2-x-x^2}{1+x}\right)=M(0)=I$

ب) لدينا : (E,T) زمرة تبادلية عنصرها المحايد : $M(-1)$

القانون $\times$ قانون تركيب داخلي تبادلي في E و تجميعي لأن $E\subset M_2(IR)$ و $(M_2(IR),\times)$ تجميعي

القانون $\times$ توزيعي بالنسبة لـ T في E و له عنصر محايد هو : $I=M(0)$

إذن : $(E,T,\times)$ حلقة واحدية تبادلية، و بما أن لكل $M(x)\in E-\{M(-1)\}$ مماثلا بالنسبة للقانون $\times$ هو $M\left(\dfrac{-x}{1+x}\right)$ فإن $(E,T,\times)$ جسم تبادلي

التمرين الرابع :

الجزء الأول:

$$\begin{cases} f(x)=x(1+\ln^2 x);\ x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

1 لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x(1+\ln^2 x)=+\infty$ (لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\ln^2 x)=+\infty$)

و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\ln^2 x)=+\infty$

ما يعني أن (C) يقبل فرعا شلجميا باتجاه محور الأراتيب جوار $+\infty$

2 أ) لدينا : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x+x\ln^2 x=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x+(\sqrt{x}\ln x)^2=0+0^2=0=f(0)$

إذن f متصلة يمين الصفر

للتذكير : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x^r\ \ln(x)=0$ حيث $r\in Q^{*+}$ (في حالتنا : $r=\dfrac{1}{2}$)

ب) لدينا : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} 1+\ln^2 x=+\infty$ (لأن : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\ln x=-\infty$)

إذن $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=+\infty$ ، ما يعني أن الدالة غير قابلة للاشتقاق يمين الصفر، لكن المنحنى (C) يقبل نصف مماس عمودي في النقطة O له نفس منحى المتجهة $\vec{j}$

ليس من الضروري تحديد منحى نصف المماس، لكنه يساعد على اكتشاف أي خطأ في جدول التغيرات لاحقا

المنحى نعرفه انطلاقا من إشارة النتيجة و يمين أو يسار النهاية(في حالتنا $(+)\times(+)\to+$ $\begin{cases}+\infty\\0^+\end{cases}$ أي الأعلى أي منحى $\vec{j}$

ج) لدينا : $\forall x>0\quad f'(x)=1+\ln^2 x+x\left(2\ln x\times\dfrac{1}{x}\right)=1+\ln^2 x+2\ln x=(\ln x+1)^2$

لدينا : $(\ln x+1)^2\geq0\quad \forall x>0$ ، و $(\ln x+1)^2=0\ \Leftrightarrow\ \ln x=-1\ \Leftrightarrow\ x=\dfrac{1}{e}$

إذن $f'(x)$ موجبة على $]0;+\infty[$ و تنعدم في عدد وحيد، إذن f تزايدية قطعا على $]0;+\infty[$

الرتابة القطعية تستوجب أحد حالتين:

- أن تكون المشتقة لها إشارة سالبة قطعا أو موجبة قطعا على كل المجال
- أن تكون موجبة أو سالبة و أن تنعدم في عدد معدود من الحلول (حل، حلان...)

أ) لدينا لكل $x \in]0;+\infty[$: $f''(x) = 2(\ln x + 1) \times \frac{1}{x} = \frac{2}{x}(\ln x + 1)$

ولدينا : $x = e^{-1} \Leftrightarrow \ln x + 1 = 0$ و $x > e^{-1} \Leftrightarrow \ln x + 1 > 0$

إذن : $f''(x)$ تنعدم و تغير إشارتها في e^{-1} إذن فالمنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف I أفصولها e^{-1}

ب) لدينا لكل $x \in]0;+\infty[$: : $f(x) - x = x\ln^2 x \geq 0$ و $x = 1 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow f(x) - x = 0$

إذن (C) يوجد فوق المستقيم $(D): \ y = x$ و يقطعه في النقطة $A(1;1)$

دراسة الوضع النسبي تستوجب أيضا دراسة نقط التقاطع

ج)

الشكل تم إنشاؤه باستعمال برنامج الموقع : Super Graph

الجزء الثاني:
$$\begin{cases} u_0 = e^{-1} \\ u_{n+1} = f(u_n) \ ; \ n \in IN \end{cases}$$

1 نعلم أن : $e > 1$ إذن : $\frac{1}{e} \leq \frac{1}{e} < 1$: أي $\frac{1}{e} \leq u_0 < 1$

نفترض أن : $\frac{1}{e} \leq u_n < 1$، إذن : $f\left(\frac{1}{e}\right) \leq f(u_n) < f(1)$ (لأن f تزايدية على $]0;+\infty[$)

منه : $\frac{2}{e} \leq u_{n+1} < 1$ منه : $\frac{1}{e} \leq u_{n+1} < 1$ (لأن : $\frac{1}{e} < \frac{2}{e}$)، إذن حسب مبدأ الترجع: $\frac{1}{e} \leq u_n < 1 \quad \forall n \in IN$

2 لدينا : $u_{n+1} - u_n = u_n \ln^2(u_n) \quad \forall n \in IN$

و لدينا : $u_n \ln^2(u_n) > 0 \quad \forall n \in IN \Rightarrow \begin{cases} \ln(u_n) < 0 \\ u_n > 0 \end{cases} \forall n \in IN \Rightarrow \frac{1}{e} \leq u_n < 1 \quad \forall n \in IN$

إذن : $(u_n)_n$ متتالية تزايدية قطعا، وبما أنها مكبورة بالعدد 1 فهي متقاربة.

يمكن أيضا استعمال السؤال 3) ب) من الجزء الأول

3

أ) لدينا : $\frac{1}{e} \le u_n < 1$ $\forall n \in IN$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{e} = \frac{1}{e}$ ، إذن : $\frac{1}{e} \le l \le 1$

ب) لدينا: الدالة f متصلة على $\left[\frac{1}{e};1\right]$ و $f\left(\left[\frac{1}{e};1\right]\right) = \left[\frac{2}{e};1\right] \subset \left[\frac{1}{e};1\right]$ و المتتالية $(u_n)_n$ متقاربة نهايتها l

إذن l تحقق المعادلة $f(x) = x$ و التي حسب الجزء الأول تقبل حلين بالظبط 1 و 0

و لكون : $\frac{1}{e} \le l \le 1$ ، فإن : $l = 1$

الجزء الثالث: $F(x) = \int_1^x f(t)dt \qquad \forall x \in [0;+\infty[$

1

أ) لدينا لكل $x \in]0;+\infty[$:

$$H'(x) = \left(\frac{-1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2 \ln x\right)' = \frac{-2}{4}x + \frac{1}{2}\left(2x\ln x + x^2 \times \frac{1}{x}\right) = \frac{-1}{2}x + x\ln x + \frac{1}{2}x = x\ln x = h(x)$$

إذن الدالة H هي دالة أصلية للدالة h

ب) لدينا لكل $x \in]0;+\infty[$:

$$\int_1^x t\ln^2(t)dt = \int_1^x \left(\frac{1}{2}t^2\right)' \ln^2(t)dt = \left[\frac{1}{2}t^2 \ln^2(t)\right]_1^x - \int_1^x \frac{1}{2}t^2\, 2\ln(t) \times \frac{1}{t}dt = \frac{x^2}{2}\ln^2(x) - \int_1^x t\,\ln(t)dt$$

ج) لدينا لكل $x \in]0;+\infty[$:

$$F(x) = \int_1^x t\left(1+\ln^2(t)\right)dt = \int_1^x t + t\,\ln^2(t)dt = \int_1^x t\,dt + \int_1^x t\,\ln^2(t)dt$$

$$F(x) = \left[\frac{1}{2}t^2\right]_1^x + \frac{x^2}{2}\ln^2(x) - \left[\frac{-1}{4}t^2 + \frac{1}{2}t^2 \ln t\right]_1^x = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} + \frac{x^2}{2}\ln^2(x) - \left(\frac{-x^2}{4} + \frac{x^2}{2}\ln x\right) + \left(\frac{-1}{4}\right)$$

$$F(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} + \frac{x^2}{2}\ln^2(x) + \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{4} = \frac{-3}{4} + \frac{3x^2}{4} - \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{2}\ln^2(x)$$

2

أ) نعلم أن الدالة f متصلة على $[0;+\infty[$، إذن فهي تقبل دالة أصلية k متصلة و قابلة للاشتقاق على $[0;+\infty[$، و منه : $F(x) = k(x) - k(1) \quad \forall[0;+\infty[$ ، ما يعني أن الدالة F متصلة على $[0;+\infty[$

ب)

$$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} F(x) = \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{-3}{4} + \frac{3x^2}{4} - \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{2}\ln^2(x) = \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{-3}{4} + \frac{3x^2}{4} - \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{(x\ln x)^2}{2}$$

$$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} F(x) == \frac{-3}{4} + 0 - 0 + 0 = \frac{-3}{4}$$

بما أن F متصلة يمين الصفر حسب السؤال السابق فإن : $\int_0^1 f(t)dt = -\int_1^0 f(t)dt = -F(0) = -\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} F(x) = \frac{3}{4}$

التمرين الخامس :

$$\begin{cases} g(x) = \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t}dt \quad ; x > 0 \\ g(0) = \ln 2 \end{cases}$$

1

أ) ليكن $x > 0$ ، لدينا : $t \in [x,2x] \Rightarrow x \le t \le 2x \Rightarrow -2x \le -t \le -x \Rightarrow e^{-2x} \le e^{-t} \le e^{-x}$

إذن : $e^{-2x} \le e^{-t} \le e^{-x} \quad (\forall t \in [x,2x]) \quad (\forall x > 0)$

ب) حسب السؤال السابق نستنتج أن : $\frac{e^{-2x}}{t} \le \frac{e^{-t}}{t} \le \frac{e^{-x}}{t} \quad (\forall t \in [x,2x]) \quad (\forall x > 0)$

منه : $\int_x^{2x} \frac{e^{-2x}}{t}dt \le \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t}dt \le \int_x^{2x} \frac{e^{-x}}{t}dt \quad (\forall x > 0)$

منه: $(\forall x>0)\quad e^{-2x}\int_x^{2x}\frac{1}{t}dt \le g(x) \le e^{-x}\int_x^{2x}\frac{1}{t}dt$ أي: $(\forall x>0)\quad e^{-2x}[\ln t]_x^{2x} \le g(x)\le e^{-x}[\ln t]_x^{2x}$

منه: $(\forall x>0)\quad e^{-2x}(\ln 2x-\ln x)\le g(x)\le e^{-x}(\ln 2x - \ln x)$

بالتالي: $(\forall x>0)\quad e^{-2x}\ln 2 \le g(x)\le e^{-x}\ln 2$

ج) بما أن $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} e^{-x}\ln 2=\ln 2$ و $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} e^{-2x}\ln 2=\ln 2$ فإن: $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} g(x)=\ln 2=g(0)$ ، إذن g متصلة يمين 0

2

بما أن الدالة $t\mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ متصلة على $]0;+\infty[$ فهي تقبل دالة أصلية G متصلة و قابلة للاشتقاق على هذا المجال، ولدينا، لكل $x>0$: $g(x)=G(2x)-G(x)$ ، وبما أن $x\mapsto 2x$ قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ فإن الدالة g قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و لدينا:

$$\forall x>0\qquad g'(x)=2G'(2x)-G'(x)=2\frac{e^{-2x}}{2x}-\frac{e^{-x}}{x}=\frac{e^{-2x}-e^{-x}}{x}$$

3

أ) ليكن $t>0$، الدالة $p:x\mapsto e^{-x}$ متصلة على $[0,t]$ و قابلة للاشتقاق على $]0,t[$ (لأنها متصلة و قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$)، إذن حسب مبرهنة التزايدات المنتهية:

$$\exists c_t\in\,]0,t[\qquad \frac{p(t)-p(0)}{t}=p'(c_t)$$

ولدينا: $p'(x)=-e^{-x}\quad \forall x>0$ ، منه: $\exists c_t\in\,]0,t[\qquad \frac{e^{-t}-1}{t}=-e^{-c_t}$

ولدينا: $c_t\in\,]0,t[\;\Rightarrow\; 0<c_t<t\;\Rightarrow\; -t<-c_t<0 \;\Rightarrow\; e^{-t}<e^{-c_t}<1\;\Rightarrow\; -1<-e^{-c_t}<-e^{-t}$

منه: $-1<\frac{e^{-t}-1}{t}<-e^{-t}$

بالتالي: $\forall t>0\quad -1<\frac{e^{-t}-1}{t}<-e^{-t}$ أو أيضا: $\forall t>0\quad -1\le\frac{e^{-t}-1}{t}\le -e^{-t}$

ب) لدينا: $\forall t>0 \quad -1\le \frac{e^{-t}-1}{t}\le -e^{-t}$ منه: $\forall x>0\quad \int_x^{2x}-1\,dt\le\int_x^{2x}\frac{e^{-t}-1}{t}dt\le\int_x^{2x}-e^{-t}\,dt$

منه: $\forall x>0\quad [-t]_x^{2x}\le \int_x^{2x}\frac{e^{-t}}{t}dt-\int_x^{2x}\frac{1}{t}dt\le[e^{-t}]_x^{2x}$

منه: $\forall x>0\quad -2x+x\le g(x)-\ln 2\le e^{-2x}-e^{-x}$

بالتالي: $\forall x>0\quad -1\le\frac{g(x)-\ln 2}{x}\le\frac{e^{-2x}-e^{-x}}{x}$

ج) بما أن: $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{e^{-2x}-e^{-x}}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{e^{-2x}-1}{x}-\frac{e^{-x}-1}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} -2\frac{e^{-2x}-1}{-2x}+\frac{e^{-x}-1}{-x}=-2\times1+1=-1$

و $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} -1=-1$ ، فإن: $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{g(x)-\ln 2}{x}=-1$ أي: $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{g(x)-g(0)}{x}=-1$ ، ما يعني أن g قابلة للاشتقاق يمين الصفر.