التمرين الأول

$$U(2N,2B);V(2N,2B);W(1N,2B)$$

1) الاحتمال لكي يتم السحب من الصندوق U

لكي يتم السحب من الصندوق U يجب أن نسحب كرة بيضاء من الصندوق W و هذا الاحتمال هو: $\frac{2}{3}$

الاحتمال لكي يتم السحب من الصندوق U هو : $\frac{2}{3}$

2) احتمال الحصول على كرتين بيضاوين في نهاية التجربة:

يتحقق الحدث إذا و فقط إذا سحبنا كرة بيضاء من $W(1N,2B)$ و كرتين بيضاوين من $U(2N,3B)$

أو سحبنا كرة سوداء من $W(1N,2B)$ و كرتين بيضاوين من $V(3N,2B)$

إذن احتمال هذا الحدث هو : $\frac{2}{3}\times\frac{C_3^2}{C_5^2}+\frac{1}{3}\times\frac{C_2^2}{C_5^2}=\frac{2\times3+1}{3\times10}=\frac{7}{30}$

احتمال الحصول على كرتين بيضاوين في نهاية التجربة:هو $\frac{7}{30}$

3) قانون احتمال المتغير العشوائي X

لدينا $X(\Omega)=\{0,1,2\}$

$p((X=0))=\frac{2}{3}\times\frac{C_2^2}{C_5^2}+\frac{1}{3}\times\frac{C_3^2}{C_5^2}=\frac{5}{30}$ و $p((X=1))=\frac{2}{3}\times\frac{C_2^1\times C_3^1}{C_5^2}+\frac{1}{3}\times\frac{C_3^1\times C_2^1}{C_5^2}=\frac{18}{30}$

و لدينا حسب السؤال 2) $p((X=2))=\frac{7}{30}$

ومنه قانون احتمال المتغير العشوائي X مقدم في الجدول التالي:

k	0	1	2
$p((X=k))$	$\frac{5}{30}$	$\frac{18}{30}$	$\frac{7}{30}$

التمرين الثاني

$$(\forall n\in\mathbb{N});c_n=2.10^n-1 \text{ و } b_n=2.10^n+1$$

1) لدينا $b_n\wedge c_n=c_n\wedge(b_n-c_n)=c_n\wedge2$ و بما أن c_n عدد فردي فإن $c_n\wedge2=1$ إذن $b_n\wedge c_n=1$

نستنتج أن b_n و c_n أوليان في ما بينهما

$b_n\wedge c_n=c_n\wedge2$ و b_n و c_n أوليان في ما بينهما

2) بما أن $b_n\wedge c_n=1$ فإن حسب مبرهنة بوزو يوجد (x_n,y_n) من $\mathbb{N}^2$ بحيث $b_nx_n+c_ny_n=1$

نحدد x_n و y_n باستعمال خوارزمية أقليدس:

لدينا $\begin{cases}b_n=c_n+2\\c_n=2(10^n-1)+1\end{cases}\Rightarrow1=c_n-2(10^n-1)\Rightarrow1=c_n-(b_n-c_n)(10^n-1)\Rightarrow1=c_n10^n+(1-10^n)b_n$

نستنتج أن

$x_n=1-10^n$ و $y_n=10^n$

التمرين الثالث

I $\forall(a,b)\in(]-1,1[)^2\ ;a*b=\dfrac{a+b}{1+ab}$

1) لدينا: $\begin{cases}-1<a<1\\-1<b<1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|a|<1\\|b|<1\end{cases}\Rightarrow|ab|<1\Rightarrow-1<ab<1\Rightarrow0<1+ab<2$

إذن

$$\boxed{\forall(a,b)\in(]-1,1[)^2\ ;1+ab>0}$$

لدينا $a*b-1=\dfrac{a+b}{1+ab}-1=\dfrac{a+b-1-ab}{1+ab}=\dfrac{(a-1)(1-b)}{1+ab}<0$

و $a*b+1=\dfrac{a+b}{1+ab}+1=\dfrac{a+b+1+ab}{1+ab}=\dfrac{(a+1)(1+b)}{1+ab}>0$

نستنتج أن $-1<a*b<1$ و منه $a*b\in J$ و بالتالي:

$\boxed{*\text{ قانون داخلي في } J}$

2) أ) لنبين أن القانون * تبادلي و تجميعي

لدينا $y*x=\dfrac{y+x}{1+yx}=\dfrac{x+y}{1+xy}=x*y\ ;(\forall(x,y)\in J^2)$ إذن القانون * تبادلي

و لدينا $(\forall(x,y,z)\in J^3);(x*y)*z=\dfrac{x+y}{1+xy}*z=\dfrac{\dfrac{x+y}{1+xy}+z}{1+\dfrac{x+y}{1+xy}z}=\dfrac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz}$

و $x*(y*z)=x*\dfrac{y+z}{1+yz}=\dfrac{x+\dfrac{y+z}{1+yz}}{1+x\dfrac{y+z}{1+yz}}=\dfrac{x+xyz+y+z}{1+yz+xy+xz}$

إذن $(\forall(x,y,z)\in J^3);(x*y)*z=x*(y*z)$ و منه القانون *تجميعي

$\boxed{\text{القانون * تبادلي و تجميعي}}$

ب) تحديد العنصر المحايد

لنحدد e من J بحيث $(\forall x\in J);x*e=x$

$(\forall x\in J);x*e=x\Leftrightarrow\dfrac{x+e}{1+xe}=x\overset{(1+xe>0)}{\Leftrightarrow}x+e=x+x^2e\Leftrightarrow(1-x^2)e=0$

و بما أن $x\in]-1,1[$ فإن $1-x^2\neq0$ و منه $e=0$ و $(0\in J)$

القانون * تبادلي إذن $(\forall x\in J);x*0=0*x=x$ وهذا يعني أن

$\boxed{0\text{ هو العنصر المحايد للقانون }*}$

ج) لنبين أن $(J,*)$ زمرة تبادلية

ليكن x من J و x' مماثله(إذا وجد) بالنسبة للقانون *

لدينا $x*x'=0\Leftrightarrow\dfrac{x+x'}{1+xx'}=0\Leftrightarrow x'=-x$

و بما أن $x\in]-1,1[$ فإن $-x\in]-1,1[$ و القانون * تبادلي إذن $(\forall x\in J);x*(-x)=(-x)*x=0$

و منه لكل x من J مماثل بالنسبة للقانون $*$ هو $-x$

خلاصة: القانون $*$ تبادلي و تجميعي و يقبل عنصرا محايدا و لكل عنصر من J مماثل في J إذن

$\boxed{(J,*)\ \text{زمرة تبادلية}}$

II f تطبيق معرف على $\mathbb{R}$ ب $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$

1) لنبين أن f تقابل من $\mathbb{R}$ نحو J

ليكن y من J و لنحل المعادلة: $(x\in\mathbb{R});\ f(x)=y$

$$(x\in\mathbb{R});\ f(x)=y \Leftrightarrow \frac{e^x-1}{e^x+1}=y \Leftrightarrow ye^x+y=e^x-1 \Leftrightarrow e^x=\frac{y+1}{1-y}$$

و بما أن $y\in J$ فإن $\dfrac{y+1}{1-y}>0$ ومنه لكل y من J سابق و حيد في $\mathbb{R}$ هو $\ln\dfrac{1+y}{1-y}$ نستنتج أن

$\boxed{f\ \text{تقابل من}\ \mathbb{R}\ \text{نحو}\ J}$

ملاحظة: يمكن أن نبين تقابل f باستعمال اتصال و رتابة f .

2) $\perp$ قانون معرف على J ب: $(\forall (x,y)\in J^2);\ x\perp y=f\big(g(x)\times g(y)\big)$

لنبين f أن تشاكل من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحو $(J^*,\perp)$ بحيث $J^*=J\setminus\{0\}$

لدينا $\left(\forall (x,y)\in \left(\mathbb{R}^*\right)^2\right);\ f(x)\perp f(y)=f\Big(g\big(f(x)\big)\times g\big(f(y)\big)\Big)$

و بما أن g هو التقابل العكسي ل f فإن $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, g\big(f(x)\big)=x, g\big(f(y)\big)=y$

نستنتج أن $\left(\forall (x,y)\in \left(\mathbb{R}^*\right)^2\right);\ f(x)\perp f(y)=f(x\times y)$ و هذا يعني أن

$\boxed{\text{أن}\ f\ \text{تشاكل من}\ (\mathbb{R}^*,\times)\ \text{نحو}\ (J^*,\perp)}$

3) لنبين أن $(J,*,\perp)$ جسم تبادلي

لدينا f تشاكل من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحو $(J^*,\perp)$ و $(\mathbb{R}^*,\times)$ زمرة تبادلية إذن $(J^*,\perp)$ زمرة تبادلية

و لدينا $(J,*)$ زمرة تبادلية و $\perp$ توزيعي على $*$ نستنتج أن

$\boxed{(J,*,\perp)\ \text{جسم تبادلي}}$

التمرين الرابع

I 1) لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2+i=0$

لدينا $z+i=0 \Leftrightarrow z^2=\dfrac{1}{2}(1-i)^2 \Leftrightarrow (z=\dfrac{1}{\sqrt{2}}-i\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ أو $z=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+i\dfrac{1}{\sqrt{2}})$

بما أن a هو حل المعادلة بحيث $\mathrm{Re}(a)>0$ فإن $a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}-i\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ومنه مجموعة حلول المعادلة هي :

$$\boxed{S=\{-a,a\}}$$

2)أ) معيار و عمدة العدد العقدي $1+a$

لدينا

$$1+a=1+\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}=1+\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}=2\cos^2\frac{\pi}{8}-2i\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}=2\cos\frac{\pi}{8}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right)$$

نستنتج أن

$$\boxed{|1+a|=2\cos\frac{\pi}{8}\quad \text{و}\quad \arg(1+a)\equiv-\frac{\pi}{8}[2\pi]}$$

ب) استنتاج $\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

حسب السؤال السابق لدينا $\cos\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}|1+a|=\frac{1}{2}\sqrt{\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{1+\sqrt{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$

ومنه

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}$$

ج) لنبين أن $(1+a)(1-a)=1+i$

لدينا $(1+a)(1-a)=1-a^2=1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)\right)^2=1-\left(\frac{1}{2}(+2i)\right)=1+i$

إذن

$$\boxed{(1+a)(1-a)=1+i}$$

استنتاج الشكل المثلثي ل $1-a$

لدينا $1-a=\frac{1+i}{1+a}=\frac{\left[\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right]}{\left[2\cos\frac{\pi}{8},-\frac{\pi}{8}\right]}=\left[\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}},\frac{3\pi}{8}\right]=\left[\sqrt{2-\sqrt{2}},\frac{3\pi}{8}\right]$

إذن الشكل المثلثي للعدد $1-a$

$$\boxed{1-a=\left[\sqrt{2-\sqrt{2}},\frac{3\pi}{8}\right]}$$

II في المستوى المنسوب الى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$ لدينا A, B, M و M' النقط التي ألحاقها على التوالي $a, -a, z$ و z'.

بحيث $zz'+i=0$ و N النقطة التي لحقها $\bar{z}$.

1) لنبين أن المستقيمين (ON) و (OM') متعامدان

لدينا $\overline{\left(\overrightarrow{OM'},\overrightarrow{ON}\right)}\equiv Arg\left(\frac{aff\left(\overrightarrow{ON}\right)}{aff\left(\overrightarrow{OM'}\right)}\right)(2\pi)$ و $Arg\left(\frac{aff\left(\overrightarrow{ON}\right)}{aff\left(\overrightarrow{OM'}\right)}\right)\equiv Arg\left(\frac{\bar{z}}{z'}\right)(2\pi)$

و بما أن $\frac{\bar{z}}{z'}=\frac{z\bar{z}}{zz'}=\frac{z\bar{z}}{-i}=iz\bar{z}=\left[z\bar{z},\frac{\pi}{2}\right]$ فإن $Arg\left(\frac{\bar{z}}{z'}\right)\equiv\frac{\pi}{2}(2\pi)$ و منه $\overline{\left(\overrightarrow{OM'},\overrightarrow{ON}\right)}\equiv\frac{\pi}{2}(2\pi)$ و هذا يعني أن

$$\boxed{\text{المستقيمين } (ON) \text{ و } (OM') \text{ متعامدان}}$$

2) أ) لنبين أن $z'-a=i\frac{z-a}{az}$

لدينا $z'-a=\frac{-i}{z}-a=\frac{-i-az}{z}=\frac{-ia-a^2z}{az}\overset{(a^2=-i)}{=}\frac{-ia+iz}{az}=i\frac{z-a}{az}$

و هذا هو المطلوب

$$\boxed{z'-a=i\frac{z-a}{az}}$$

ب) لدينا $z'+a=z'-a+2a=i\frac{z-a}{az}+2a=\frac{iz-ia+2a^2z}{az}=-i\frac{z+a}{az}$

ومنه $z\neq -a\Rightarrow z+a\neq 0\Rightarrow z'+a\neq 0\Rightarrow z'\neq -a$

أي أن :

$$\boxed{\text{إذا كان } z\neq -a \text{ فإن } z'\neq -a}$$

ولدينا $z'-a=i\dfrac{z-a}{az}$ و $z'+a=-i\dfrac{z+a}{az}$ إذن $\dfrac{z'-a}{z'+a}=\dfrac{i\dfrac{z-a}{az}}{-i\dfrac{z+a}{az}}=-\dfrac{z-a}{z+a}$ و منه

$$\boxed{\frac{z'-a}{z'+a}=-\frac{z-a}{z+a}}$$

3) بما أن النقط M,B,A غير مستقيمية فإن النقط M,B,A و M' غير مستقيمية

إذن M,B,A و M' متداورة يكافئ $\dfrac{z-a}{z'-a}\times\dfrac{z'+a}{z+a}\in\mathbb{R}$

و لدينا $\dfrac{z'-a}{z'+a}=-\dfrac{z-a}{z+a}\Rightarrow\dfrac{z-a}{z'-a}\times\dfrac{z'+a}{z+a}=-1$ إذن M,B,A و M' متداورة

ومنه

$$\boxed{\text{النقطة } M' \text{ تنتمي إلى الدائرة المحيطة بالمثلث } AMB}$$

التمرين الخامس

f دالة معرفة على $]0,+\infty[$ ب $f(x)=\dfrac{-\ln x}{\sqrt{x}}$

1) حساب نهايتي f عند 0^+ و عند $+\infty$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{-\ln x}{\sqrt{x}}=+\infty$$ (لأن $\lim_{x\to0^+}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$ و $\lim_{x\to0^+}(-\ln x)=+\infty$)

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\ln x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}-2\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=0$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}f(x)=0;\ \lim_{x\to0^+}f(x)=+\infty}$$

التأويل الهندسي

$$\boxed{\text{: محور الافاصيل مقارب ل } (C) \text{ و محور الاراتيب مقارب ل } (C) \text{ بجوار } +\infty}$$

2) حساب مشتقة f

f قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و لدينا $(\forall x\in\mathbb{R});f'(x)=\dfrac{-\dfrac{\sqrt{x}}{x}+\dfrac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x}=\dfrac{x\ln x-2x}{2x^2\sqrt{x}}=\dfrac{\ln x-2}{2x\sqrt{x}}$

إذن

$$\boxed{(\forall x\in\mathbb{R});f'(x)=\frac{\ln x-2}{2x\sqrt{x}}}$$

إشارة f' هي إشارة $\ln x-2$ أي إشارة $\ln x-\ln e^2$ و منه

$$\boxed{f \text{ تزايدية قطعا على المجال } [e^2,+\infty[\text{ و تناقصية قطعا على }]0,e^2]}$$

3) g_n دالة معرفة على $]0,1[$ ب $g_n(x)=f(x)-x^n$ مع $n\in\mathbb{N}^*$

أ) لنبين أن g_n تناقصية قطعا على $]0,1[$

g_n قابلة للاشتقاق على $]0,1[$ و لدينا $(\forall x\in]0,1[);g_n^{'}(x)=f^{'}(x)-nx^{n-1}$

بمان أن $(\forall x\in]0,1[);\ f^{'}(x)<0$ فإن $(\forall x\in]0,1[);g_n^{'}(x)<0$ و منه

$\boxed{g_n \text{ تناقصية قطعا على }]0,1[}$

ب) لنبين أن $\exists!\alpha_n\in]0,1[;\ f(\alpha_n)=(\alpha_n)^n$

g_n متصلة و تناقصية قطعا على المجال $]0,1[$ إذن g_n تقابل من $]0,1[$ نحو $g_n(]0,1[)$ و لدينا

$$g_n(]0,1[)=\left]\lim_{x\to1^-}g_n(x),\lim_{x\to0^+}g_n(x)\right[=]-1,+\infty[$$

و بما أن $0\in]-1,+\infty[$ فإن للمعادلة ل 0 سابق و حيد α_n ب g_n و $\alpha_n\in]0,1[$ يعني $\exists!\alpha_n\in]0,1[;g_n(\alpha_n)=0$

و بما أن $g_n(\alpha_n)=f(\alpha_n)-(\alpha_n)^n$ فإن $f(\alpha_n)=(\alpha_n)^n$ و هذا هو المطلوب:

$\boxed{\exists!\alpha_n\in]0,1[;\ f(\alpha_n)=(\alpha_n)^n}$

ج) لنبين أن $(\forall n\in\mathbb{N}^*);g_n(\alpha_{n+1})<0$

حسب السؤال ج) $\forall n\in\mathbb{N}^*;n+1\in\mathbb{N}^*\Rightarrow\exists!\alpha_{n+1}\in]0,1[$

و لدينا $f(\alpha_{n+1})=(\alpha_{n+1})^{n+1}$ إذن $g_n(\alpha_{n+1})=(\alpha_{n+1})^{n+1}-(\alpha_{n+1})^n=(\alpha_{n+1})^n(\alpha_{n+1}-1)<0$

و هذا هو المطلوب

$\boxed{(\forall n\in\mathbb{N}^*);g_n(\alpha_{n+1})<0}$

د)لنبين أن المتتالية $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ تزايدية قطعا

لدينا $g_n(\alpha_{n+1})<0$ و $\forall n\in\mathbb{N}^* g_n(\alpha_n)=0$

إذن $\forall n\in\mathbb{N}^* g_n(\alpha_{n+1})<g_n(\alpha_n)$ وبما أن g_n تناقصية قطعا على المجال $]0,1[$ فإن $(\forall n\in\mathbb{N}^*);\alpha_{n+1}>\alpha_n$

ما يعني أن :

$\boxed{\text{المتتالية } (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ تزايدية قطعا}}$

المتتالية $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ تزايدية و مكبورة ب 1 إذن فهي متقاربة

4) أ) لنتحقق من أن $0<\alpha_1\le l\le 1$

بما أن $(\forall n\in\mathbb{N}^*);\alpha_n\in]0,1[$ فإن $\lim\alpha_n\in[0,1]$ و بما أن $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ تزايدية قطعا فإن $(\forall n\in\mathbb{N}^*);\alpha_n\ge\alpha_1$

و منه $\lim\alpha_n\ge\alpha_1$ نستنتج أن l نهاية $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ تحقق

$\boxed{0<\alpha_1\le l\le 1}$

ب) لنبين أن $(\forall n\in\mathbb{N}^*);h(\alpha_n)=n$

لدينا $h(x)=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\ln(-\ln x)}{\ln x}$

$(\forall n\in\mathbb{N}^*);h(\alpha_n)=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\ln(-\ln(\alpha_n))}{\ln(\alpha_n)}$ و بما أن $(\forall x>0);\ f(x)=\dfrac{-\ln x}{\sqrt{x}}$

فإن $(\alpha_n)^n=f(\alpha_n)=\dfrac{-\ln\alpha_n}{\sqrt{\alpha_n}}$

و منه

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*);h(\alpha_n)=-\frac{1}{2}+\frac{\ln\left((\alpha_n)^{n+\frac{1}{2}}\right)}{-(\alpha_n)^{n+\frac{1}{2}}}=-\frac{1}{2}+\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\ln(\alpha_n)}{-(\alpha_n)^{n+\frac{1}{2}}}=-\frac{1}{2}+\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{-(\alpha_n)^{n+\frac{1}{2}}}{-(\alpha_n)^{n+\frac{1}{2}}}=-\frac{1}{2}+\left(n+\frac{1}{2}\right)=n$$

وبالتالي:

$$\boxed{(\forall n\in\mathbb{N}^*);h(\alpha_n)=n}$$

ج) لنبين أن $l=1$

نفترض أن $l\neq 1$ إذن $0<l<1$ و بما أن الدالة h معرفة و متصلة على المجال $]0,1[$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} h(\alpha_n)=h(l)$

و هذا غير ممكن لأن $\lim\limits_{n\to+\infty} h(\alpha_n)=\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty$ إذن الافتراض الأول خاطئ و عكسه هو الصحيح

$$\boxed{l=1}$$

د) لنبين أن $\lim\limits_{n\to+\infty}(\alpha_n)^n=0$

لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\alpha_n=\ln(1)<0$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\alpha_n=-\infty$ و منه $\lim\limits_{n\to+\infty}(\alpha_n)^n=\lim\limits_{n\to+\infty} e^{n\ln\alpha_n}=0$ و هذا هو المطلوب

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}(\alpha_n)^n=0}$$

II -1) أ) لندرس إشارة التكامل $\int_x^1 f(x)\,dx$ لكل x من $\mathbb{R}^*$

لدينا $0<x<1\Rightarrow \ln x<0\Rightarrow f(x)>0 \overset{(0<x<1)}{\Rightarrow}\int_x^1 f(x)\,dx>0$

و $x>1\Rightarrow \ln x>0\Rightarrow f(x)<0\overset{(x>1)}{\Rightarrow}\int_x^1 f(x)\,dx>0$ و $x=1\Rightarrow\int_x^1 f(x)\,dx=0$

نستنتج أن

$$\boxed{(\forall x\in]0,+\infty[);\int_x^1 f(x)\,dx\geq 0}$$

ب)لنبين ان $(x\in\mathbb{R}_+^*);\int_x^1 f(x)\,dx=4-4\sqrt{x}+2\sqrt{x}\ln x$

لدينا

$$(x\in\mathbb{R}_+^*);\int_x^1 f(x)\,dx=\int_x^1\frac{-\ln x}{\sqrt{x}}dx=\left[2\sqrt{x}(-\ln x)\right]_x^1-\int_x^1(2\sqrt{x})\left(\frac{-1}{x}\right)dx=2\sqrt{x}\ln x+2\int_x^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx$$

$$=2\sqrt{x}\ln x+2\left[2\sqrt{x}\right]_x^1=2\sqrt{x}\ln x+4\left(1-\sqrt{x}\right)=4-4\sqrt{x}+2\sqrt{x}\ln x$$

و منه

$$\boxed{(x\in\mathbb{R}_+^*);\int_x^1 f(x)\,dx=4-4\sqrt{x}+2\sqrt{x}\ln x}$$

ج) حساب مساحة الحيز المحصور بالمنحنى (C) و المستقيمات التي معادلاتها على التوالي $x=1$ و $x=e^2$ و $x=0$

لتكن S هذه المساحة ب cm^2 لدينا $S=\left(\int_{e^2}^1 f(x)\,dx\right)cm^2=\left(4-4\sqrt{e^2}+2\sqrt{e^2}\ln e^2\right)cm^2=4cm^2$

المساحة المطلوبة هي

$$\boxed{S=4cm^2}$$

2) لكل n من $\mathbb{N}^*$ نضع: $u_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} f\left(\frac{k}{n}\right)$

أ) لدينا f متصلة وتناقصية قطعا على $]0,1]$ و $\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right]\subset]0,1]$ إذن f متصلة وتناقصية قطعا على $\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right]$ و منه

$$\frac{k}{n}\le x\le\frac{k+1}{n}\Rightarrow f\left(\frac{k}{n}\right)\ge f(x)\ge f\left(\frac{k+1}{n}\right)\Rightarrow \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right)dx\ge\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\,dx\ge\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k+1}{n}\right)dx$$

و لدينا $\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right)dx=\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$ و $\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k+1}{n}\right)dx=\frac{1}{n}f\left(\frac{k+1}{n}\right)$

نستنتج أن لكل n و k من $\mathbb{N}$ بحيث $n\ge 2$ و $1\le k\le n-1$ لدينا:

$$\boxed{\frac{1}{n}f\left(\frac{k+1}{n}\right)\le\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\,dx\le\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)}$$

ب)المتفاوتة السابقة تستلزم أن:

$$(1)\quad \sum_{k=1}^{k=n-1}\frac{1}{n}f\left(\frac{k+1}{n}\right)\le\sum_{k=1}^{k=n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\,dx\le\sum_{k=1}^{k=n-1}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

لدينا $f(1)=0$ إذن $\sum_{k=1}^{k=n-1}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=u_n$

و لدينا $\sum_{k=1}^{k=n-1}\frac{1}{n}f\left(\frac{k+1}{n}\right)=\sum_{k=2}^{k=n}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\sum_{k=2}^{k=n-1}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=u_n-\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)$

كما أن $\sum_{k=1}^{k=n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\,dx=\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\,dx$

نستنتج بعد التعويض في (1) أن : $(\forall\in\mathbb{N}^*);u_n\le\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)dt\le u_n-\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)$

يعني أن $(\forall\in\mathbb{N}^*);\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)d\le u_n\le\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)dt+\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)$ و هذا هو المطلوب

$$\boxed{(\forall\in\mathbb{N}^*);\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)d\le u_n\le\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)dt+\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)}$$

ج) حسب السؤال ب) و بوضع $x=\frac{1}{n}$ نحصل على $(\forall n\in\mathbb{N}^*);\int_x^1 f(x)\,dx\le u_n\le xf(x)+\int_x^1 f(x)\,dx$

و لدينا $\lim_{n\to+\infty} xf(x)+\int_x^1 f(x)\,dx=\lim_{x\to0^+}-x\frac{\ln x}{\sqrt{x}}+4-4\sqrt{x}+2\sqrt{x}\ln x=\lim_{x\to0^+}-\sqrt{x}\ln x+4-4\sqrt{x}+2\sqrt{x}\ln x=4$

و $\lim_{n\to+\infty}\int_x^1 f(x)\,dx=\lim_{x\to0^+}4-4\sqrt{x}+2\sqrt{x}\ln x=4$

إذن حسب خاصيات النهايات و الترتيب

$$\boxed{\lim u_n=4}$$

التمرين السادس

g الدالة المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ ب $g(x)=\int_{\sqrt{x}}^{1} e^{-t^2}dt$ و نضع $(\forall x\in\mathbb{R});k(x)=\int_1^x e^{-t^2}dt$

1) أ) لدينا $(\forall x\in\mathbb{R});g(x)=\int_{\sqrt{x}}^{1} e^{-t^2}dt=-\int_1^{\sqrt{x}} e^{-t^2}dt=-k\left(\sqrt{x}\right)$

أذن

$$\boxed{(\forall x\in\mathbb{R});g(x)=-k\left(\sqrt{x}\right)}$$

ب)أتصال و اشتقاق الدالة g

الدالة $t \xrightarrow{\varphi} e^{-t^2}$ متصلة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ إذن الدالة k متصلة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ (أصلية φ التي تنعدم عند1)

و الدالة $t \xrightarrow{\psi} \sqrt{t}$ متصلة على $[0,+\infty[$ و قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ إذن الدالة g متصلة على $[0,+\infty[$ و قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ (مركب k و ψ)

إذن:

$$\boxed{g \text{ متصلة على } [0,+\infty[\text{ و قابلة للاشتقاق على }]0,+\infty[}$$

ج) حساب $g'(x)$

لدينا $\left(\forall x\in]0,+\infty[\right); g'(x) = -k'\left(\sqrt{x}\right)\times\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{-e^{-x^2}}{2\sqrt{x}}$ إذن

$$\boxed{\left(\forall x\in]0,+\infty[\right); g'(x) = \frac{-e^{-x^2}}{2\sqrt{x}}}$$

بما أن $\left(\forall x\in]0,+\infty[\right); g'(x) < 0$ فإن g تناقصية قطعا على $]0,+\infty[$ و بما أنها متصلة على يمين 0 فإنها تناقصية قطعا على $[0,+\infty[$

$$\boxed{\text{الدالة } g \text{ تناقصية قطعا على } [0,+\infty[}$$

2)أ) لنبين أن $\forall\left(x\in \mathbb{R}_+^*\right); \frac{g(x)-g(0)}{x} < \frac{-e^{-x^2}}{2\sqrt{x}}$

ليكن x من $\mathbb{R}_+^*$ الدالة g متصلة على المجال $[0,x]$ و قابلة للاشتقاق على $]0,x[$

إذن حسب مبرهنة التزايدات المنتهية يوجد c من $]0,x[$ بحيث

$$\frac{g(x)-g(0)}{x} = g'(c) = \frac{-e^{-c^2}}{2\sqrt{c}}$$

لدينا

$$0<c<x \Rightarrow \begin{cases} 0<2\sqrt{c}<2\sqrt{x} \\ c^2<x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} < \frac{1}{2\sqrt{c}} \\ -x^2<-c^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0<\frac{1}{2\sqrt{x}} < \frac{1}{2\sqrt{c}} \\ 0<e^{-x^2}<e^{-c^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{e^{-x^2}}{2\sqrt{x}} < \frac{e^{-c^2}}{2\sqrt{c}} \Rightarrow \frac{-e^{-c^2}}{2\sqrt{c}} < \frac{-e^{-x^2}}{2\sqrt{x}}$$

ومنه $\forall\left(x\in \mathbb{R}_+^*\right); \frac{g(x)-g(0)}{x} < \frac{-e^{-x^2}}{2\sqrt{x}}$

$$\boxed{\forall\left(x\in \mathbb{R}_+^*\right); \frac{g(x)-g(0)}{x} < \frac{-e^{-x^2}}{2\sqrt{x}}}$$

ب) دراسة قابلية اشتقاق الدالة g على يمين الصفر و التأويل الهندسي للنتيجة المحصل عليها

لدينا : $\begin{cases} \forall\left(x\in \mathbb{R}_+^*\right); \frac{g(x)-g(0)}{x} < \frac{-e^{-x^2}}{2\sqrt{x}} \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{-e^{-x^2}}{2\sqrt{x}} = -\infty \end{cases}$ إذن $\lim\limits_{x\to +0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x} = -\infty$

و بالتالي g غير قابلة للاشتقاق على يمين 0 و مبيان g يقبل نصف مماس عمودي (موجه نحو الأسفل)

$$\boxed{\text{و بالتالي } g \text{ غير قابلة للاشتقاق على يمين } 0 \text{ و مبيان } g \text{ يقبل نصف مماس عمودي (موجه نحو الأسفل)}}$$

إضافة مبيان الدالتين f و h