

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

الدورة الاستدراكية 2014

الموضوع

RS 24

ⵜⴰⴳⴷⴰⵢⵜ ⵏ ⵏⵓⵔⵓⵙⵜ
ⵜⴰⴳⴷⴰⵢⵜ ⵏ ⵏⵓⵔⵓⵙⵜ
ⵏ ⵏⵓⵔⵓⵙⵜ



المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني

المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

4	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية (أ) و(ب)	الشعبة أو المسلك

- مدة إنجاز الموضوع هي أربع ساعات.
- يتكون الموضوع من ستة تمارين مستقلة فيما بينها.
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين الأول يتعلق بحساب الاحتمالات.....(2ن)
- التمرين الثاني يتعلق بالحسابيات.....(1ن)
- التمرين الثالث يتعلق بالبنيات الجبرية.....(3.75ن)
- التمرين الرابع يتعلق بالأعداد العقدية.....(3.25ن)
- التمرين الخامس يتعلق بالتحليل.....(7.5ن)
- التمرين السادس يتعلق بالتحليل.....(2.5ن)

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

التمرين الأول: (2 ن)

نعتبر ثلاثة صناديق U و V و W .
يحتوي الصندوق W على كرة سوداء و كرتين بيضاوين و يحتوي كل صندوق من الصندوقين U و V على كرتين سوداوين و كرتين بيضاوين.

نقوم بالتجربة التالية : نسحب كرة من الصندوق W . إذا كانت هذه الكرة بيضاء نضعها في الصندوق U ثم نسحب منه تانيا كرتين ، أما إذا كانت هذه الكرة سوداء فنضعها في الصندوق V ثم نسحب منه تانيا كرتين.

- 1- ما هو احتمال أن يتم السحب من الصندوق U ؟ 0.25
2- ما هو احتمال الحصول على كرتين بيضاوين في نهاية التجربة؟ 0.75
3- ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الكرات البيضاء المحصل عليها في نهاية التجربة.
حدد قانون احتمال المتغير العشوائي X 1

التمرين الثاني: (1 ن)

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم.

$$\text{نضع: } b_n = 2 \cdot 10^n + 1 \text{ و } c_n = 2 \cdot 10^n - 1$$

- 1- بين أن: $c_n \not\equiv c_n \pmod{b_n}$ ثم استنتج أن b_n و c_n أوليان فيما بينهما. 0.5

(b ظ a هو القاسم المشترك الأكبر للعددين الصحيحين a و b)

- 2- أوجد زوجا (x_n, y_n) من \mathbb{Z}^2 يحقق: $b_n x_n + c_n y_n = 1$ 0.5

التمرين الثالث: (3,75 ن)

نضع $J =]-1, 1[$

1- لكل عنصرين a و b من المجال J ، نضع: $a * b = \frac{a+b}{1+ab}$

- 1- تحقق أن: $1 + ab > 0$ (J^2 خ (a, b) ") ثم استنتج أن * قانون تركيب داخلي في J 0.75

2- (أ) بين أن القانون * تبادلي و تجمعي. 0.5

(ب) بين أن $(J, *)$ يقبل عنصرا محايدا يتم تحديده. 0.25

(ج) بين أن $(J, *)$ زمرة تبادلية. 0.5

II - نعتبر التطبيق f المعرف على \mathbb{R} بما يلي: $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

1- بين أن الدالة f تقابل من \mathbb{R} نحو J 0.75

2- ليكن g التقابل العكسي للتطبيق f (تحديد g غير مطلوب) .

لكل عنصرين x و y من J نضع: $x \perp y = f(g(x) \times g(y))$

بين أن f تشاكل من (\mathbb{R}, \times) نحو (J, \perp) حيث: $J^* = J - \{0\}$ 0.5

3- نذكر أن (\mathbb{R}, \times) زمرة تبادلية، ونقبل أن القانون \perp توزيعي بالنسبة للقانون * في J .

بين أن $(J, *, \perp)$ جسم تبادلي. 0.5

التمرين الرابع: (3.25 ن)

1- I حل في \mathbb{C} المعادلة : $z^2 + i = 0$ (a يرمز لحل المعادلة بحيث: $Re(a) > 0$) 0.5

2- (أ) حدد معيار و عمدة العدد العقدي $1 + a$ 0.5

(ب) استنتج أن: $\cos \frac{p}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$ 0.25

(ج) تحقق أن: $(1 + a)(1 - a) = 1 + i$ ثم استنتج الشكل المثلثي للعدد $1 - a$ 0.5

II - في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر (O, u, v) ، نعتبر النقط A و B و M و M'

التي ألقاها على التوالي هي a و $-a$ و z و z' و نفترض أن: $zz' + i = 0$

1- لتكن N النقطة التي لحقها \bar{z} مرافق z

بين أن المستقيمين (ON) و (OM') متعامدان. 0.25

2- (أ) بين أن : $z' - a = i \frac{z - a}{az}$ 0.25

(ب) بين أنه إذا كان $z^1 - a$ فإن $z'^1 - a$ و $\frac{z' - a}{z' + a} = -\frac{z - a}{z + a}$ 0.5

3- نفترض أن النقط A و B و M غير مستقيمية.

بين أن النقطة M' تنتمي إلى الدائرة المحيطة بالمثلث ABM 0.5

التمرين الخامس: (7.5 نقط)

I - لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0, +\infty[$ بما يلي: $f(x) = \frac{-\ln x}{\sqrt{x}}$

ولیکن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم (O, i, j) بحيث: $\|i\| = 1 \text{ cm}$

1- أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم أعط تأويلا هندسيا للنتيجتين المحصل عليهما. 1

2- أحسب $f'(x)$ ثم استنتج تغيرات الدالة f على المجال $]0, +\infty[$ 0.75

3- لكل n من \mathbb{N}^* نعتبر الدالة العددية g_n المعرفة على $]0, 1[$ بما يلي: $g_n(x) = f(x) - x^n$

(أ) بين أن الدالة g_n تناقصية قطعاً على المجال $]0, 1[$ 0.25

(ب) استنتج أنه لكل n من \mathbb{N}^* ، يوجد عدد حقيقي وحيد α_n من المجال $]0, 1[$ بحيث: $f(\alpha_n) = (\alpha_n)^n$ 0.5

(ج) بين أن لكل n من \mathbb{N}^* لدينا: $g_n(a_{n+1}) < 0$ 0.5

(د) بين أن المتتالية $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ تزايدية قطعاً ثم استنتج أنها متقاربة. 0.75

4- نضع $l = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

(أ) تحقق أن $0 < a_1 \leq l \leq 1$ 0.25

(ب) تحقق أن: $h(a_n) = n$ (" $n \in \mathbb{N}^*$ ") حيث: $h(x) = -\frac{1}{2} + \frac{\ln(-\ln(x))}{\ln x}$ 0.25

(ج) بين أن: $l = 1$ 0.5

(د) استنتج أن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha_n)^n = 0$ 0.25

II - (أ) أدرس إشارة التكامل $\int_x^1 f(x) dx$ لكل x من \mathbb{N}^* ، 0.25

(ب) باستعمال طريقة المكاملة بالأجزاء بين أن: $\int_x^1 f(x) dx = 4 - 4\sqrt{x} + 2\sqrt{x} \ln x$ (" $x \in \mathbb{N}^*$ ") 0.5

(ج) أستنتج بالوحدة cm^2 مساحة الحيز المستوي المحصور بين المنحنى (C) و المستقيمت التي معادلاتها على التوالي: 0.25

$x = 1$ و $x = e^2$ و $y = 0$

$$2- \text{ لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم } n \text{ نضع: } u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

(أ) بين أنه لكل عددين صحيحين طبيعيين n و k بحيث $n \geq 2$ و $1 \leq k \leq n-1$ لدينا:

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x) dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

(ب) بين أن : $\int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt \leq u_n \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) + \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt$ (" * خ n ")

(ج) استنتج أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$

التمرين السادس (2.5 نقط)

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $[0, +\infty[$ بما يلي: $g(x) = \int_{\sqrt{x}}^1 e^{-t^2} dt$

1- لكل x من ، نضع : $k(x) = \int_1^x e^{-t^2} dt$

(أ) تحقق أنه لكل x من المجال $[0, +\infty[$ لدينا: $g(x) = -k(\sqrt{x})$

(ب) بين أن الدالة g متصلة على $[0, +\infty[$ وقابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$

(ج) احسب $g'(x)$ لكل x من $]0, +\infty[$ ثم استنتج أن الدالة g تناقصية قطعاً على المجال $[0, +\infty[$

2- (أ) بين أن: $\frac{g(x) - g(0)}{x} < -\frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-x}$ ($\forall x \in]0, +\infty[$)

(ب) استنتج أن الدالة g غير قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 و أعط تأويلاً هندسياً للنتيجة المحصل عليها.

انتهى