المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني
ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⵙⴳⵎⵉ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ
ⴷ ⵓⵙⵎⵓⵜⵜⴳ ⴰⵙⵏⴰⵍ
المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

الدورة العادية 2014

الموضوع

NS 24

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	4
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم الرياضية (أ) و(ب)	المعامل	9

- مدة إنجاز الموضوع هي أ ربع ساعات.
- يتكون الموضوع من خمسة تمارين مستقلة فيما بينها .
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين الأول يتعلق بالحسابيات............................(3ن)
- التمرين الثاني يتعلق بالبنيات الجبرية.....................(3.5ن)
- التمرين الثالث يتعلق بالأعداد العقدية......................(3.5ن)
- التمرين الرابع يتعلق بالتحليل..............................(8ن)
- التمرين الخامس يتعلق بالتحليل ....(2ن)

لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة كيفما كان نوعها

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

التمرين الأول:(3 نقط)

لكل n من $\mathbb{N}^*$ نضع : $a_n = \underbrace{333......3}_{n \text{ مرة}}1$ (n مرة الرقم 3)

1- تحقق أن العددين a_1 و a_2 أوليان. 0.5

2- بين أن لكل n من $\mathbb{N}^*$: $3a_n + 7 = 10^{n+1}$ 0.5

3- بين أن لكل k من $\mathbb{N}$: $10^{30k+2} \equiv 7 \; [31]$ 0.75

4- بين أن لكل k من $\mathbb{N}$: $3a_{30k+1} \equiv 0 \; [31]$ ، ثم استنتج أن 31 يقسم a_{30k+1} 0.75

5- بين أنه لكل n من $\mathbb{N}^*$، إذا كان $n \equiv 1 \; [30]$ فإن المعادلة $a_n x + 31y = 1$ لا تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$ 0.5

التمرين الثاني:(3.5 نقطة)

نذكر أن $(\mathbb{C},+,\times)$ جسم تبادلي و أن $(M_2(\mathbb{C}),+,\times)$ حلقة واحدية صفرها $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

و وحدتها $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

لكل a و b من $\mathbb{C}$ ، نضع: $M(a,b) = \begin{pmatrix} a & a-b \\ b & a+b \end{pmatrix}$ ونعتبر المجموعة : $E = \{M(a,b) / (a,b) \in \mathbb{C}^2\}$

1- بين أن E زمرة جزئية للزمرة $(M_2(\mathbb{C}),+)$. 0.5

2- احسب $J^2 = J \times J$ حيث: $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ثم استنتج أن E جزء غير مستقر من $(M_2(\mathbb{C}),\times)$ 0.75

3- نعرف على $M_2(\mathbb{C})$ قانون التركيب الداخلي $*$ بما يلي : $A * B = A \times N \times B$ حيث : $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

ونعتبر التطبيق φ من $\mathbb{C}^*$ نحو $M_2(\mathbb{C})$ الذي يربط كل عدد عقدي غير منعدم $a+ib$ (a و b عددان حقيقيان) بالمصفوفة $M(a,b)$.

أ) بين أن φ تشاكل من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(M_2(\mathbb{C}),*)$ 0.5

ب) نضع: $E^* = E - \{O\}$. بين أن: $\varphi(\mathbb{C}^*) = E^*$ 0.25

ج) بين أن $(E^*,*)$ زمرة تبادلية. 0.5

4- بين أن: $A*(B+C) = A*B + A*C \quad (\forall (A,B,C) \in E^3)$ 0.5

5- استنتج مما سبق أن $(E,+,*)$ جسم تبادلي. 0.5

التمرين الثالث: (3.5 نقط)

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

ليكن θ عددا حقيقيا بحيث: $\theta \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[- \left\{\frac{\pi}{4}\right\}$

1- نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية: $(E) \quad z^2-\sqrt{2}e^{i\theta}z+e^{2i\theta}=0$

أ) تحقق أن مميز المعادلة (E) هو: $\Delta=\left(\sqrt{2}ie^{i\theta}\right)^2$ 0.25

ب) اكتب على الشكل المثلثي z_1 و z_2 حلي المعادلة (E) في المجموعة $\mathbb{C}$. 0.75

2- نعتبر النقط I و J و T_1 و T_2 و A التي ألحاقها على التوالي 1 و -1 و $e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}$ و $e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}$ و $\sqrt{2}e^{i\theta}$

أ) بين أن المستقيمين (OA) و (T_1T_2) متعامدان . 0.5

ب) ليكن K منتصف القطعة $[T_1T_2]$. بين أن النقط O و K و A مستقيمية. 0.25

ج) استنتج أن المستقيم (OA) هو واسط القطعة $[T_1T_2]$. 0.25

3- ليكن r الدوران الذي مركزه T_1 و قياس زاويته $\frac{\pi}{2}$

أ) اعط الصيغة العقدية للدوران r. 0.25

ب) تحقق أن لحق النقطة B صورة النقطة I بالدوران r هو: $b=\sqrt{2}e^{i\theta}+i$ 0.5

ج) بين أن المستقيمين (IJ) و (AB) متعامدان . 0.25

4- حدد لحق النقطة C صورة النقطة A بالإزاحة التي متجهتها $\left(-\vec{v}\right)$ 0.25

5- بين أن النقطة A هي منتصف القطعة $[BC]$. 0.25

التمرين الرابع: (8 نقط)

I- نعتبر الدالة f المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{-x\ln x}{1+x^2} \ ; \ x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

1- أ) بين أن الدالة f متصلة على المجال $[0,+\infty[$ 0.5

ب) أدرس إشارة $f(x)$ على المجال $[0,+\infty[$ 0.25

2- أ) بين أن: $f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x) \qquad \left(\forall x\in\mathbb{R}_+^*\right)$ 0.25

ب) بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ 0.25

ج) بين أن: $f'(\alpha)=0 \quad (\exists \alpha \in]0,1[)$ 0.5

د) استنتج أن: $f'\left(\frac{1}{\alpha}\right)=0$ 0.5

II - نعتبر الدالة F المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي: $F(x)=\int_0^x f(t)dt$

ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة F في معلم متعامد ممنظم.

1- أ) تحقق أن: $\frac{1}{2}\leq\frac{t^2}{1+t^2}\leq 1 \quad (\forall t\in[1,+\infty[)$ 0.5

ب) بين أن: $F(1)-\frac{1}{2}(\ln x)^2\leq F(x)\leq F(1)-\frac{1}{4}(\ln x)^2 \quad (\forall x\in[1,+\infty[)$ 1

(لاحظ أن: $F(x)=\int_0^1 f(t)dt - \int_1^x \frac{t^2}{1+t^2}\cdot\frac{\ln t}{t}dt$)

ج) أحسب $\lim_{x\to+\infty}F(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}$ ثم اعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها. 1

2- أ) بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على المجال $[0,+\infty[$ ثم أحسب $F'(x)$ 0.5

ب) أدرس تغيرات الدالة F على المجال $[0,+\infty[$ 0.25

III -1- أ) بين أن : $-t\ln t\leq\frac{1}{e} \quad (\forall t\in]0,+\infty[)$ 0.5

ب) بين أن : $f(t)\leq\frac{1}{e} \quad (\forall t\in[0,+\infty[)$ 0.25

ج) استنتج أن: $F(x)<x \quad (\forall x\in]0,+\infty[)$ 0.25

2- نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي: $u_0\in]0,1[$ و $u_{n+1}=F(u_n) \quad (\forall n\in\mathbb{N})$

أ) بين أن: $u_n\in]0,1[\quad (\forall n\in\mathbb{N})$ 0.5

ب) بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ تناقصية قطعا ثم استنتج أنها متقاربة . 0.5

ج) حدد $\lim_{n\to+\infty}u_n$ 0.5

التمرين الخامس:(2 نقط)

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي:

$$\begin{cases} g(x)=\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} \; ; \; x>0 \\ g(0)=0 \end{cases}$$

1- بين أن الدالة g متصلة على المجال $[0,+\infty[$	0.5
2- لكل عدد حقيقي x من المجال $[0,+\infty[$ ، نضع $L(x)=\int_x^1 g(t)dt$	
أ)بين أن الدالة L متصلة على المجال $[0,+\infty[$	0.25
ب)أحسب $L(x)$ من أجل $x>0$	0.25
ج)أحسب $\lim_{x\to 0^+} L(x)$ ثم استنتج قيمة $L(0)$	0.5
3- لكل عدد صحيح طبيعي n أكبر من أو يساوي 1 نضع: $s_n=\frac{1}{n}\sum_{p=0}^{p=n-1} g\left(\frac{p}{n}\right)$.	
بين أن المتتالية $(s_n)_{n\geq 1}$ متقاربة ثم حدد نهايتها.	0.5

انتهى