المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية و التعليم العالي
وتكوين الأطر والبحث العلمي
المركز الوطني للتقويم والإمتحانات

**الإمتحـــــان الوطني الموحد**
**لنيل شهادة البكالوريـــــــا**
**الدورة العـــــادية 2013**

**مـــادة الريــــاضيات**
**العلوم الرياضيـــــية أ و ب**
**مدة الإنجاز : أربع ساعـــات**
**المعـــــامل :9**

## التمرين الأول : ( 3,5 ن )

نذكر أن $(\mathbb{Z},+,\times)$ حلقة واحدية تبادلية و كاملة .

1 - نزود $\mathbb{Z}$ بقانون التركيب الداخلي $*$ المعرف بما يلي : $\forall(x,y)\epsilon\mathbb{Z}^2 \;;\; x*y=x+y-2$

0,50 ن — 1 أ) بين أن القانون $*$ تبادلي و تجميعي .

0,25 ن — 1 ب) بين أن : $(\mathbb{Z},*)$ تقبل عنصرا محايدا يتم تحديده .

0,50 ن — 1 ج) بين أن : $(\mathbb{Z},*)$ زمرة تبادلية .

2 - نزود $\mathbb{Z}$ بقانون التركيب الداخلي $\top$ المعرف بـ : $\forall(x,y)\epsilon\mathbb{Z}^2 \;;\; x\top y=xy-2x-2y+6$

و نعتبر التطبيق $f$ من $\mathbb{Z}$ نحو $\mathbb{Z}$ المعرف بما يلي : $(\forall x\epsilon\mathbb{Z}) \;;\; f(x)=x+2$

0,50 ن — 2 أ) بين أن التطبيق $f$ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{Z},\times)$ نحو $(\mathbb{Z},\top)$ .

0,25 ن — 2 ب) بين أن : $\forall\,(x,y,z)\,\epsilon\,\mathbb{Z}^3 \;;\; (x*y)\top z=(x\top z)*(y\top z)$

0,75 ن — 3) إستنتج من كل ما سبق أن : $(\mathbb{Z},*,\top)$ حلقة تبادلية و واحدية .

0,25 ن — 4 أ) بين أن : $x\top y=2$ إذا وفقط إذا كان $x=2$ أو $y=2$ .

0,25 ن — 4 ب) استنتج أن الحلقة $(\mathbb{Z},*,\top)$ كاملة .

0,25 ن — 4 ج) هل $(\mathbb{Z},*,\top)$ جسم ؟ ( علل الجواب )

## التمرين الثاني : ( 3,5 ن )

I - ليكن $a$ عددا عقديا غير منعدم .

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $z$ :

$$(E):2z^2-\left(3+i\sqrt{3}\right)az+\left(1+i\sqrt{3}\right)a^2=0$$

0,25 ن — I 1) تحقق أن مميز المعادلة $(E)$ هو : $\left(-1+i\sqrt{3}\right)^2a^2$ .

0,50 ن — I 2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $(E)$ .

II - المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$

نعتبر النقط $A$ و $B$ و $M$ التي ألحاقها على التوالي : $a$ و $b=ae^{\frac{i\pi}{3}}$ و $z$ .

ليكن $r$ الدوران الذي مركزه $M$ و زاويته $\frac{\pi}{3}$ . نضع : $A_1=r^{-1}(A)$ و $B_1=r(B)$

( حيث $r^{-1}$ هو الدوران العكسي للدوران $r$ )

ليكن $a_1$ و $b_1$ لحقي $A_1$ و $B_1$ على التوالي .

0,50 ن — II 1) تحقق أن المثلث $OAB$ متساوي الأضلاع .

0,50 ن — II 2 أ) بين أن : $a_1=\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a+\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$ و $b_1=\left(\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a+\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$

0,50 ن — II 2 ب) بين أن الرباعي $OA_1MB_1$ متوازي أضلاع .

0,50 ن | II | 3 | أ | نفترض أن $M \neq A$ و $M \neq B$ بين أن : $\frac{z-b_1}{z-a_1} = -\left(\frac{z-b}{z-a}\right) \times \frac{a}{b}$

0,75 ن | II | 3 | ب | بين أن النقط $M$ و $A_1$ و $B_1$ مستقيمية إذا و فقط إذا كانت النقط $M$ و $O$ و $A$ و $B$ متداورة .

## التمرين الثالث : ( 3 ن )

الهدف من التمرين هو البحث عن الأعداد الصحيحة الطبيعية $n$ الأكبر قطعا من 1 و التي تحقق الخاصية $(\mathfrak{R})$ التالية : $(\mathfrak{R}) :\ 3^n - 2^n \equiv 0\ [n]$ .

1 | نفترض أن $n$ يحقق الخاصية $(\mathfrak{R})$ . و ليكن $p$ أصغر قاسم أولي موجب للعدد $n$ .

0,75 ن | 1 | أ | بين أن : $3^n - 2^n \equiv 0\ [p]$ ثم استنتج أن $p \geq 5$ .

0,50 ن | 1 | ب | بين أن : $2^{p-1} \equiv 1[p]$ و $3^{p-1} \equiv 1[p]$ .

0,50 ن | 1 | ج | بين أنه يوجد زوج $(a,b)$ من $\mathbb{Z}^2$ بحيث : $an - b(p-1) = 1$ .

0,50 ن | 1 | د | ليكن $r$ و $q$ باقي و خارج القسمة الأقليدية للعدد $a$ على $(p-1)$ .

(يعني : $a = q(p-1) + r$ حيث : $0 \leq r < p-1$ و $q \in \mathbb{Z}$ )

بين أنه يوجد عدد صحيح طبيعي غير منعدم $k$ بحيث : $rn = 1 + k(p-1)$ .

0,75 ن | 2 | إستنتج من كل ما سبق أنه لا يوجد عدد صحيح طبيعي $n$ أكبر قطعا من 1 و يحقق الخاصية $(\mathfrak{R})$ .

## التمرين الرابع : ( 10 ن )

**الجزء الأول** نعتبر الدالة $h$ المعرفة على المجال $[1;+\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} h(x) = \dfrac{x-1}{x\ln x} \ ;\ (\forall x > 1) \\ h(1) = 1 \end{cases}$$

0,25 ن | 1 | أ | بين أن الدالة $h$ متصلة على اليمين في 1 .

0,75 ن | 1 | ب | بين أن : $(\forall x > 1)\,;\ln x < x - 1$ ثم استنتج أن $h$ تناقصية قطعا على المجال $]1;+\infty[$ .

0,50 ن | 2 | أ | أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة $h$ .

0,25 ن | 2 | ب | استنتج أن : $(\forall x \geq 1)\ ;\ 0 < h(x) \leq 1$ .

**الجزء الثاني** نعتبر الدالة العددية $g$ المعرفة على المجال $[1;+\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} g(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t}\ln t}\,dt \ ;\ (\forall x > 1) \\ g(1) = \ln 2 \end{cases}$$

و ليكن $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة $g$ في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ .

0,25 ن | 1 | أ | تحقق أن : $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln t}\,dt = \ln 2 \ ;\ (\forall x > 1)$

0,25 ن | 1 | ب | تحقق أن : $g(x) - \ln 2 = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\sqrt{t}-1}{t\ln t}\,dt \ ;\ (\forall x > 1)$

0,50 ن | 1 | ج | بين أن : $g(x) - \ln 2 = \displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{x} \left(\frac{t-1}{t\ln t}\right)dt \ ;\ (\forall x > 1)$

0,50 ن | 2 | أ | بين أن : $(x-\sqrt{x})h(x) \leq g(x) - \ln 2 \leq (x-\sqrt{x})h(\sqrt{x}) \ ;\ (\forall x > 1)$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 2 | ب | استنتج أن الدالة $g$ قابلة للإشتقاق على اليمين في 1 . | 0,50 ن |
| | 2 | ج | بين أن : $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ و أن : $\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = 0$ | 0,75 ن |
| | 3 | أ | بين أن $g$ قابلة للإشتقاق على المجال $]1;+\infty[$ . و أن : $(\forall x > 1)\ ;\ g'(x) = \frac{1}{2}h(\sqrt{x})$ | 0,75 ن |
| | 3 | ب | استنتج أن : $(\forall x \geq 1)\ ;\ 0 < g'(x) \leq \frac{1}{2}$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة $g$ . | 0,50 ن |
| | 3 | ج | أنشئ المنحنى $(\mathscr{C})$ . | 0,50 ن |

**الجزء الثالث**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| I | 1 | | بين أن الدالة : $k : x \mapsto g(x) - x + 1$ تقابل من $[1;+\infty[$ نحو $]-\infty;\ln 2]$ . | 0,50 ن |
| I | 2 | | استنتج أنه يوجد عدد حقيقي وحيد $\alpha$ من المجال $]1;+\infty[$ بحيث : $1 + g(\alpha) = \alpha$ . | 0,25 ن |
| II | | | نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي : $\begin{cases} u_{n+1} = 1 + g(u_n)\ ;\ (\forall n \geq 0) \\ 1 \leq u_0 < \alpha \end{cases}$ | |
| II | 1 | أ | بين أن : $(\forall n \geq 0)\ ;\ 1 \leq u_n < \alpha$ | 0,50 ن |
| II | 1 | ب | بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ تزايدية قطعا . | 0,50 ن |
| II | 1 | ج | استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة . و أن : $\lim_{n\infty} u_n = \alpha$ | 0,75 ن |
| II | 2 | أ | بين أن : $(\forall n \geq 0)\ ;\ \lvert u_{n+1} - \alpha \rvert \leq \frac{1}{2} \lvert u_n - \alpha \rvert$ | 0,50 ن |
| II | 2 | ب | بين أن : $(\forall n \geq 0)\ ;\ \lvert u_n - \alpha \rvert \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \lvert u_0 - \alpha \rvert$ | 0,50 ن |
| II | 2 | ج | استنتج مرة ثانية أن : $\lim_{n\infty} u_n = \alpha$ | 0,25 ن |