## التمرين الأول : ( 3,5 ن )

■ (I)(1)

ليكن $x$ و $y$ عنصرين من $[1;+\infty[$

إذن : $x \geq 1$ و $y \geq 1$

و منه : $\sqrt{x} \geq 1$ و $\sqrt{y} \geq 1$

يعني : $\sqrt{x}+\sqrt{y}-1)^2 \geq 1$

إذن : $x \perp y \in [1;+\infty[$

و بالتالي : $\perp$ قانون تركيب داخلي في $I$ .

■ (I)(2)

ليكن $x$ و $y$ عنصرين من $[1;+\infty[$

لدينا :
$$x \perp y = (\sqrt{x}+\sqrt{y}-1)^2$$
$$\Leftrightarrow \quad x \perp y = (\sqrt{y}+\sqrt{x}-1)^2$$
$$\Leftrightarrow \quad x \perp y = y \perp x$$

و منه $\perp$ قانون تبادلي في $I$ .

ليكن $x$ و $y$ و $z$ ثلاثة عناصر من المجال $I$ .

لدينا :
$$(x \perp y) \perp z = \left(\sqrt{x \perp y}+\sqrt{z}-1\right)^2$$
$$\Leftrightarrow \quad x \perp y) \perp z = (\sqrt{x}+\sqrt{y}-1+\sqrt{z}-1)^2$$
$$\Leftrightarrow \quad x \perp y) \perp z = (\sqrt{x}+(\sqrt{y}+\sqrt{z}-1)-1)^2$$
$$\Leftrightarrow \quad x \perp y) \perp z = (\sqrt{x}+\sqrt{y \perp z}-1)^2$$
$$\Leftrightarrow \quad (x \perp y) \perp z = x \perp (y \perp z)$$

إذن $\perp$ قانون تجميعي في $[1;+\infty[$ .

■ (I)(3)

ليكن $e$ العنصر المحايد للقانون $\perp$ في $I$ .

$$\Leftrightarrow \quad (\forall x \in I) \ ; \ x \perp e = e \perp x = x$$
$$\Leftrightarrow \quad (\forall x \in I) \ ; \ \sqrt{x}+\sqrt{e}-1)^2 = x$$
$$\Leftrightarrow \quad (\forall x \in I) \ ; \ \sqrt{x}+\sqrt{e}-1 = \pm\sqrt{x}$$

في حالة : $\sqrt{x}+\sqrt{e}-1 = -\sqrt{x}$

نحصل على : $e = (1-2\sqrt{x})^2$

لكن : $(1-2\sqrt{x})^2 \notin I$ لأنه لدينا $x \in I$

إذن : $x \geq 0$ و منه : $(1-2\sqrt{x})^2 < 1$

أما في حالة : $\sqrt{x}+\sqrt{e}-1 = \sqrt{x}$

نحصل على : $e = 1 \in [1;+\infty[$

و نعلم أن العنصر المحايد إن وجد يكون دائما وحيدا

إذن : 1 هو العنصر المحايد للقانون $\perp$ في المجموعة $I$ .

■ (II)(1)

لتكن $M(a)$ و $M(b)$ مصفوفتين من $E$

لدينا :
$$M(a) \times M(b) = \begin{pmatrix} a & 2(a-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 2(b-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} ab & 2(ab-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = M(ab) \in E$$

إذن $E$ جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$

■ (II)(2)(أ)

ليكن $x$ و $y$ عنصرين من $\mathbb{R}^*$

لدينا :
$$\varphi(x \times y) = M(xy) = M(x) \times M(y) = \varphi(x) \times \varphi(y)$$

إذن $\varphi$ تشاكل من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحو $(E,\times)$

ليكن $M(y)$ عنصرا من $(E,\times)$

لنحل المعادلة $\varphi(x) = M(y)$ ذات المجهول $x$

$$\varphi(x) = \varphi(y) \Leftrightarrow M(x) = M(y)$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & 2(x-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & 2(y-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \quad x = y$$

و بالتالي : المعادلة $\varphi(x) = M(y)$ تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{R}^*$ و هو $y$

و بتعبير آخر :
$$(\forall M(y) \in E)\ (\exists!\, x \in \mathbb{R}^*) \ : \ \varphi(x) = M(y)$$

و منه : $\varphi$ تقابل من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحو $(E,\times)$

**خلاصة** : $\boxed{\varphi \text{ تشاكل تقابلي من } (\mathbb{R}^*,\times) \text{ نحو } (E,\times)}$ .

■ (II)(2)(ب)

نعلم أن التشاكل التقابلي يحافظ على بنية الزمرة .

نستنتج إذن بنية $(E,\times)$ انطلاقا من بنية $(\mathbb{R}^*,\times)$ عن طريق التشاكل التقابلي $\varphi$ .

لدينا : $(\mathbb{R}^*,\times)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد هو العدد الحقيقي 1 و كل عنصر $x$ يقبل $\frac{1}{x}$ كمماثل.

إذن : $(E,\times)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد هو المصفوفة $\varphi(1)$ و كل مصفوفة $M(x)$ تقبل مماثلة و هي المصفوفة $M\left(\frac{1}{x}\right)$ .

و لدينا : $$\varphi(1)=M(1)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I$$

و $$\varphi\left(\frac{1}{x}\right)=M\left(\frac{1}{x}\right)=\begin{pmatrix}\frac{1}{x} & 2\left(\frac{1}{x}-1\right)\\0&1\end{pmatrix}$$

■(II)②ج

لتكن $H_n$ مصفوفة من المجموعة $\mathcal{H}$

$$\Leftrightarrow\quad H_n=\begin{pmatrix}2^n & 2^{n+1}-2\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\quad H_n=\begin{pmatrix}2^n & 2(2^n-1)\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\quad H_n=\begin{pmatrix}x & 2(x-1)\\0&1\end{pmatrix}\ ;\ x=2^n$$

إذن : $\mathcal{H}\subset E$ و لدينا : $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\in\mathcal{H}$

إذن $\mathcal{H}$ جزء غير فارغ من $E$

لتكن : $\begin{pmatrix}2^m & 2^{m+1}-2\\0&1\end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix}2^n & 2^{n+1}-2\\0&1\end{pmatrix}$ مصفوفتين من $\mathcal{H}$ .

لدينا : $$\begin{pmatrix}2^n & 2^{n+1}-2\\0&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2^m & 2^{m+1}-2\\0&1\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}2^n & 2^{n+1}-2\\0&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2^{-m} & 2(2^{-m}-1)\\0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2^{n-m} & 2^{n-m+1}-2\\0&1\end{pmatrix}\in\mathcal{H}$$

إذن : $(\mathcal{H},\times)$ زمرة جزئية من $(E,\times)$ .

**التمرين الثاني : ( 3,5 ن )**

■(I)①أ

تعويض مباشر و حساب سهل

■(I)①ب

نعلم أنه إذا كان $z_1$ و $z_2$ هما حلا المعادلة : $az^2+bz+c=0$

فإن : $z_1+z_2=\frac{-b}{a}$ و $z_1z_2=\frac{c}{a}$

نستعمل العلاقة : $z_1z_2=\frac{c}{a}$

إذن : $z_1z_2=\left(\frac{5}{3}+4i\right)$

$$\Leftrightarrow\quad z_2=\frac{\left(\frac{5}{3}+4i\right)\left(1-\frac{2}{3}i\right)}{\left(1+\frac{2}{3}i\right)\left(1-\frac{2}{3}i\right)}$$

$$\Leftrightarrow\quad z_2=\frac{9}{13}\left(\frac{13}{3}+\frac{26}{9}i\right)$$

$$\Leftrightarrow\quad z_2=3+2i$$

$$\Leftrightarrow\quad z_2=3\left(1+\frac{2}{3}i\right)$$

$$\Leftrightarrow\quad z_2=3z_1$$

■(II)①أ

لدينا : $P=r(A)$

إذن حسب الكتابة العقدية للدوران : $(z_P-z_\Omega)=e^{\frac{i\pi}{3}}(z_A-z_\Omega)$

$$\Leftrightarrow\quad (p-\omega)=e^{\frac{i\pi}{3}}(a-\omega)$$

$$\Leftrightarrow\quad \boxed{p=e^{\frac{i\pi}{3}}(a-\omega)+\omega}\quad(1)$$

و بنفس الطريقة : $B=r(Q)$

$$\Leftrightarrow\quad (z_B-z_\Omega)=e^{\frac{i\pi}{3}}(z_Q-z_\Omega)$$

$$\Leftrightarrow\quad (b-\omega)=e^{\frac{i\pi}{3}}(q-\omega)$$

$$\Leftrightarrow\quad qe^{\frac{i\pi}{3}}=(b-\omega)+\omega e^{\frac{i\pi}{3}}$$

$$\Leftrightarrow\quad \boxed{q=e^{\frac{-i\pi}{3}}(b-\omega)+\omega}\quad(2)$$

■(II)①ب

في البداية لدينا :

$$\cos\left(\frac{-4\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\sin\left(\frac{-4\pi}{3}\right)=-\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)=-\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

ننطلق إذن من الكتابة :

$$\frac{1-e^{\frac{i\pi}{3}}}{1-e^{\frac{-i\pi}{3}}}=\frac{e^{\frac{4i\pi}{3}}\left(e^{\frac{-4i\pi}{3}}-e^{-i\pi}\right)}{\left(1-e^{\frac{-i\pi}{3}}\right)}$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{1-e^{\frac{i\pi}{3}}}{1-e^{\frac{-i\pi}{3}}}=\frac{e^{\frac{4i\pi}{3}}\left(\cos\left(\frac{-4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{-4\pi}{3}\right)+1\right)}{\left(1-\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right)-i\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)\right)}$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{1-e^{\frac{i\pi}{3}}}{1-e^{\frac{-i\pi}{3}}}=\frac{e^{\frac{4i\pi}{3}}\left(-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)+1\right)}{\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)}$$

$$\Leftrightarrow\quad \boxed{\frac{1-e^{\frac{i\pi}{3}}}{1-e^{\frac{-i\pi}{3}}}=e^{\frac{4i\pi}{3}}}$$

■ (II) 1 ج

لدينا حسب العلاقتين (1) و (2) من السؤال 1 أ

$$(p-a)=\omega+ae^{\frac{i\pi}{3}}-\omega e^{\frac{i\pi}{3}}-a$$

$$\Leftrightarrow\quad (p-a)=\omega\left(1-e^{\frac{i\pi}{3}}\right)+a\left(e^{\frac{i\pi}{3}}-1\right)$$

$$\Leftrightarrow\quad \boxed{(p-a)=\left(1-e^{\frac{i\pi}{3}}\right)(\omega-a)}\ (1)$$

و لدينا كذلك : $(q-b)=\omega+be^{\frac{-i\pi}{3}}-\omega e^{\frac{-i\pi}{3}}-b$

$$\Leftrightarrow\quad (q-b)=\omega\left(1-e^{\frac{-i\pi}{3}}\right)+b\left(e^{\frac{-i\pi}{3}}-1\right)$$

$$\Leftrightarrow\quad \boxed{(q-b)=\left(1-e^{\frac{-i\pi}{3}}\right)(\omega-b)}\ (2)$$

و منه : $\frac{p-a}{q-b}=\left(\frac{1-e^{\frac{i\pi}{3}}}{1-e^{\frac{-i\pi}{3}}}\right)\left(\frac{\omega-a}{\omega-b}\right)=\left(\frac{\omega-a}{\omega-b}\right)e^{\frac{4i\pi}{3}}$

و بالتالي : $(3)\ \boxed{\frac{p-a}{q-b}=\left(\frac{\omega-a}{\omega-b}\right)e^{\frac{4i\pi}{3}}}$

■ (II) 2 أ

نفترض أن : $\left(\frac{\omega-a}{\omega-b}\right)=e^{\frac{2i\pi}{3}}$

بالإستعانة بالعلاقة (3) نحصل على :

$$\frac{p-a}{q-b}=\left(\frac{\omega-a}{\omega-b}\right)e^{\frac{4i\pi}{3}}$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{p-a}{q-b}=e^{\frac{2i\pi}{3}}\times e^{\frac{4i\pi}{3}}=e^{2i\pi}=1$$

إذن : $(p-a)=(q-b)$

يعني : $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{BQ}$

و منه حسب التعريف المتجهي لمتوازي الأضلاع : $APBQ$ متوازي أضلاع.

■ (II) 2 ب

لدينا حسب النتيجة (1) :

$$(p-a)=\omega+ae^{\frac{i\pi}{3}}-\omega e^{\frac{i\pi}{3}}-a$$

$$\Leftrightarrow\quad \boxed{(p-a)=\left(1-e^{\frac{i\pi}{3}}\right)(\omega-a)}\ (4)$$

و لدينا كذلك حسب افتراض السؤال 2 : $\left(\frac{\omega-a}{\omega-b}\right)=e^{\frac{2i\pi}{3}}$

إذن : $(5)\ \boxed{(\omega-b)=e^{\frac{-2i\pi}{3}}(\omega-a)}$

و لدينا من جهة أخرى :

$$(b-a)=(\omega-a)-(\omega-b)$$

إذن باستعمال العلاقة (5) نحصل على :

$$(b-a)=(\omega-a)-(\omega-b)$$

$$\Leftrightarrow\quad (b-a)=(\omega-a)-e^{\frac{-2i\pi}{3}}(\omega-a)$$

$$\Leftrightarrow\quad \boxed{(b-a)=(\omega-a)\left(1-e^{\frac{-2i\pi}{3}}\right)}\ (6)$$

من (4) و (6) نستنتج أن :

$$\frac{b-a}{p-a}=\frac{(\omega-a)\left(1-e^{\frac{-2i\pi}{3}}\right)}{\left(1-e^{\frac{i\pi}{3}}\right)(\omega-a)}=\frac{1-e^{\frac{-2i\pi}{3}}}{1-e^{\frac{i\pi}{3}}}$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{b-a}{p-a}=\frac{1-\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{1-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{b-a}{p-a}=\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}}=\frac{3+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$$

نضرب طرفي آخر نتيجة في العدد العقدي $(1+i\sqrt{3})$ نحصل على :

$$\Leftrightarrow \quad \frac{b-a}{p-a} = \frac{1}{4}(3+i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3}) = \boxed{i\sqrt{3}}$$

و بالتالي : $\left(\frac{b-a}{p-a}\right) = i\sqrt{3}$

$$\Rightarrow \quad arg\left(\frac{b-a}{p-a}\right) \equiv arg(i\sqrt{3})[2\pi]$$

$$\Rightarrow \quad arg\left(\frac{b-a}{p-a}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

$$\Rightarrow \quad \overline{(\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AB})} \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

$\Rightarrow$ زاوية قائمة $P\hat{A}B$

و بما أن : $APQB$ متوازي أضلاع و إحدى زواياه قائمة.

فإن $APQB$ مستطيل.

## التمرين الثالث : ( 3,0 ن )

■ ① (أ)

لدينا الأعداد الأولية التي مربعاتها أصغر من 503 هي : 2 و 3 و 5 و 7 و 11 و 13 و 17 و 19 و لا أحد من هذه الأعداد يقسم العدد 503 .

إذن 503 عدد أولي.

■ ① (ب)

بما أن 503 عدد أولي و 7 عدد أولي كذلك.

فإنه حسب $(Fermat)$ : $7^{503-1} \equiv 1[503]$

يعني : $7^{502} \equiv 1[503]$

و منه : $(7^{502})^4 \equiv 1^4[503]$

أي : $7^{2008} \equiv 1[503]$

■ ②

لدينا : $(1,8)$ حل خاص للمعادلة $(E)$ .

و ليكن $(x,y)$ الحل العام للمعادلة $(E)$ .

إذن : $\begin{cases} 49\times 1 - 6\times 8 = 1 \\ 49x - 6y = 1 \end{cases}$

ننجز عملية الفرق بين المعادلتين طرفا بطرف نحصل على :

$$\boxed{49(x-1) = 6(y-8)} \quad (*)$$

$$\Rightarrow \quad 49 \,/\, 6(y-8)$$

بما أن $49 \wedge 6 = 1$ فإنه حسب $Gauss$ : نحصل على : $49 \,/\, (y-8)$

و منه : $y = 49k+8 \; ; \; (\exists k\epsilon\mathbb{Z})$

نعوض $y$ بقيمته في المعادلة $(*)$ نحصل على :

$$49(x-1) = 6(49k)$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 6k+1$$

**عكسيا :** لدينا : $49(6k+1) - 6(49k+8) = 1$

و بالتالي : مجموعة حلول المعادلة تكتب على شكل :

$$\boxed{\mathcal{S} = \{\, (6k+1\,;49k+8) \;\; / \;\; k\epsilon\mathbb{Z}\}}$$

■ ③ (أ)

نعلم أنه إذا كانت $q^n$ متتالية هندسية أساسها العدد الحقيقي الغير المنعدم $q$ فإن :

$$1+q+q^2+\cdots+q^n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

لدينا $7^n$ متتالية هندسية أساسها 7 إذن :

$$1+7+7^2+\cdots+7^{2007} = \frac{7^{2007+1}-1}{7-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad N = \frac{7^{2008}-1}{6}$$

$$\Leftrightarrow \quad 7^{2008} - 6N = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 7^2 \cdot 7^{2006} - 6N = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 49 \cdot 7^{2006} - 6N = 1$$

إذن الزوج $(7^{2006}, N)$ حل للمعادلة $(E)$ .

■ ③ (ب)

لدينا : $\begin{cases} 1 \equiv 1[4] \\ 7 \equiv -1[4] \end{cases}$

$$\begin{cases} 7^2 \equiv 1[4] \\ 7^3 \equiv -1[4] \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7^4 \equiv 1[4] \\ 7^5 \equiv -1[4] \end{cases}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\begin{cases} 7^{2006} \equiv 1[4] \\ 7^{2007} \equiv -1[4] \end{cases}$$

نجمع هذه المتوافقات طرفا بطرف نحصل على :

$$1+7+7^2+7^3+\cdots\cdots+7^{2006}+7^{2007} \equiv 0[4]$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{N \equiv 0[4]}$$

لدينا حسب ①ب) $7^{2008} \equiv 1[503]$ إذن : $503\,/\,(7^{2008}-1)$

و نعلم أن : $(7^{2008}-1)=6N$ إذن : $503\,/\,6N$

و بما أن 503 عدد أولي و $2\times 3$ هو التفكيك الأولي للعدد 6 فإن : $6\wedge 503=1$

و منه حسب $(Gauss)$ : $503\,/\,N$

و بالتالي : $N\equiv 0[503]$

■ ③ج)

لدينا : $503\wedge 4=1$ لأن : 503 عدد أولي.

و لأن $2^2$ هو التفكيك الأولي للعدد 4

و نعلم أن : $4\,/\,N$ و $503\,/\,N$

إذن : $4\times 503\,/\,N$ يعني : $2012\,/\,N$

**التمرين الرابع : ( 7,5 ن )**

■ (I)①

لدينا : $$g'(x)=\frac{1}{1+x}-\left(\frac{(1+x)-x}{(1+x)^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad g'(x)=\frac{x}{(1+x)^2}$$

إذن : $g'$ تنعدم في 0 و إشارتها موجبة على المجال $[0,+\infty[$ .

و منه $g$ دالة تزايدية على المجال $[0,+\infty[$ .

■ (I)②

ليكن $x$ عنصرا من $[0,+\infty[$ .

إذن $x\geq 0$ و منه : $g(x)\geq g(0)=0$

و بالتالي : $\forall x\epsilon[0,+\infty[\ ;\ g(x)\geq 0$

■ (II)①

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} e^x ln(1+e^{-x})=\lim_{x\to+\infty}\frac{ln(1+e^{-x})}{e^{-x}}$$

نضع : $t=e^{-x}$ نحصل على :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{ln(1+t)-ln(1+0)}{t-0}=\frac{1}{1+0}=1$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} e^x ln(1+e^{-x})=\lim_{x\to-\infty} e^x ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty} e^x ln\left(\frac{e^x+1}{e^x}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty} e^x\left(ln(e^x+1)-ln(e^x)\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty} \underbrace{e^x}_{0^+} ln\underbrace{(e^x+1)}_{0^+}-\underbrace{xe^x}_{0^-}=0$$

■ (II)②

ليكن $x$ عددا حقيقيا .

$$f'(x)=e^x ln(1+e^{-x})+e^x\left(\frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad f'(x)=e^x\left(ln(1+e^{-x})-\left(\frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad f'(x)=e^x g(e^{-x})$$

■ (II)③

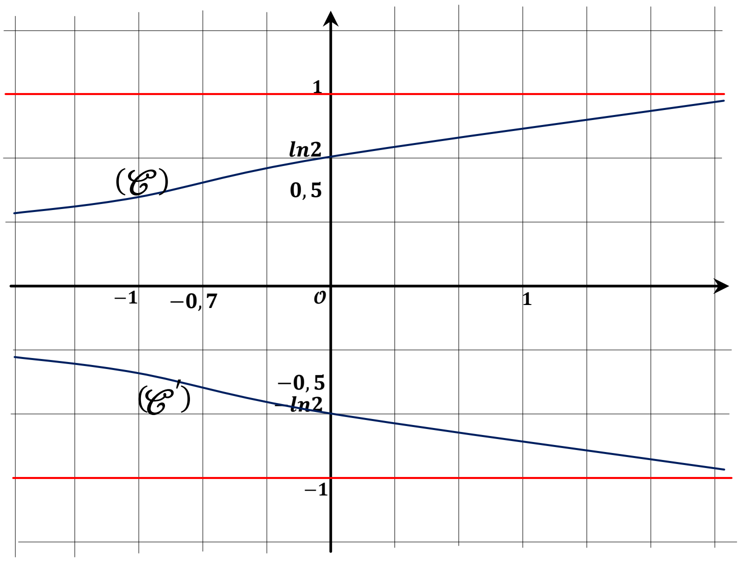
لدينا : $f'(x)=e^x g(e^{-x})$

إذن $f'$ لا تنعدم أبدا و إشارتها موجبة دائما .

و نستنتج جدول تغيرات $f$ كما يلي :

| $x$ | $-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ |
| $f$ | $0 \nearrow 1$ |

■ (II)④




■ (II)⑤

ليكن $x$ عنصرا من $]-1,0[$ .

إذن : $-1<x<0$ و منه $e^{-x}<e$ و $e^x<1$

يعني : $g(e^{-x})<g(e)$ و $e^x<1$

إذن : $0<e^x g(e^{-x})<g(e)$ أي : $0<f'(x)<g(e)$

■(II)⑥

نضع : $h(x)=f(x)+x$

لدينا : $h'(x)=f'(x)+1$

بما أن : $f'(x)>0$ حسب السؤال 5

فإن : $h'(x)>1>0$ و منه : $h$ دالة تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$

و منه : $h$ تقابل من أي مجال $[x,y]$ من $\mathbb{R}$ نحو صورته بالدالة $h$ .

نختار المجال $[-1,0]$ .

إذن $h$ تقابل من $[-1,0]$ نحو $f([-1,0])$

و لدينا : $h([-1,0])=[h(-1),h(0)]\approx\left[\frac{-1}{2},ln2\right]$

و بما أن : $0\ \epsilon \left[\frac{-1}{2},ln2\right]$

فإن الصفر يمتلك سابقا واحدا بالتقابل $h$ في المجال $[-1,0]$ .

و بتعبير آخر : $\exists!\ \alpha\ \epsilon\ [-1,0]\ ;\ h(\alpha)=0$

و بما أن : $h(-1)\neq h(0)\neq 0$

فإن : $\exists!\ \alpha\ \epsilon\ ]-1,0[\ ;\ h(\alpha)=0$

أي : $\exists!\ \alpha\ \epsilon\ ]-1,0[\ ;\ f(\alpha)+\alpha=0$

■(II)⑦أ

من أجل $n=0$ لدينا : $-1\le u_0=0\le 0$

نفترض أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ -1\le u_n\le 0$

حسب التمثيل المبياني للدالة $f$ : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ f(x)\ge 0$

إذن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ \boxed{f(u_n)\ge 0}$ (1)

و لدينا حسب الإفتراض : $u_n\le 0$

إذن : $f(u_n)\le ln2$ لأن $f$ تزايدية على $\mathbb{R}$ .

و منه : $\boxed{f(u_n)\le 1}$ (2) لأن : $ln2\approx 0,6$

من (1) و (2) نستنتج أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ 0\le f(u_n)\le 1$

$$\Leftrightarrow\ (\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ -1\le -f(u_n)\le 0$$

$$\Leftrightarrow\ (\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ -1\le u_{n+1}\le 0$$

و بالتالي حسب مبدأ الترجع : $\boxed{(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ -1\le u_n\le 0}$

■(II)⑦ب

لدينا $f$ دالة متصلة و قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ كله.

نستطيع إذن تطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على أي مجال من $\mathbb{R}$

نختار المجال الذي طرفاه $u_n$ و $\alpha$ و الذي سنرمز له بالرمز $\overleftrightarrow{[\alpha,u_n]}$

لأننا لا ندري من الأكبر هل $u_n$ أم $\alpha$ .

$$\Rightarrow\ \exists\ c\ \epsilon\ \overleftrightarrow{]\alpha,u_n[}\ ;\ \frac{f(u_n)-f(\alpha)}{u_n-\alpha}=f'(c)$$

$$\Rightarrow\ \exists\ c\ \epsilon\ \overleftrightarrow{]\alpha,u_n[}\ ;\ |f(u_n)-f(\alpha)|=f'(c)|u_n-\alpha|$$

$$\Rightarrow\ \exists\ c\ \epsilon\ \overleftrightarrow{]\alpha,u_n[}\ ;\ |-u_{n+1}+\alpha|=f'(c)|u_n-\alpha|$$

$$\Rightarrow\ \exists\ c\ \epsilon\ \overleftrightarrow{]\alpha,u_n[}\ ;\ |u_{n+1}-\alpha|=f'(c)|u_n-\alpha|$$

بما أن : $0\le f'(x)\le g(e)$

فإن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ 0\le f'(x)|u_n-\alpha|\le g(e)|u_n-\alpha|$

و منه : $\boxed{(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ |u_{n+1}-\alpha|\le g(e)|u_n-\alpha|}$

■(II)⑦ج

لدينا حسب السؤال ب :

$$(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ |u_{n+1}-\alpha|\le g(e)|u_n-\alpha|$$

من أجل $(n-1)$ نحصل على :

$$\begin{aligned}|u_n-\alpha| &\le g(e)|u_{n-1}-\alpha|\\ &\le (g(e))^2|u_{n-2}-\alpha|\\ &\le (g(e))^3|u_{n-3}-\alpha|\\ &\vdots \qquad\qquad \vdots\\ &\le (g(e))^n|u_{n-n}-\alpha|\end{aligned}$$

إذن : $|u_n-\alpha|\le (g(e))^n|0-\alpha|$

و بما أن : $\alpha\ \epsilon\ ]-1,0[$ و ذلك حسب السؤال 6

فإن : $|0-\alpha|=|\alpha|<1$

و بالتالي : $\boxed{(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ |u_n-\alpha|\le (g(e))^n}$

■ (II) 7 د

لدينا حسب السؤال 7 ج

$$(\forall n \epsilon \mathbb{N}) \; ; \; |u_n - \alpha| \leq (g(e))^n$$

و نلاحظ أن $(g(e))^n$ متتالية هندسية أساسها $g(e)$ و هو عدد موجب أصغر من 1

لأن : $g(e) < 0{,}6 < 1$

إذن : $\lim\limits_{n \to +\infty} (g(e))^n = 0$

و منه حسب مصاديق تقارب المتتاليات نستنتج أن :

$$\lim_{n \to +\infty} |u_n - \alpha| = 0$$

أي : $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha}$

**التمرين الخامس : ( 2,5 ن )**

■ 1

$$F(1) = \int_1^1 \left(\frac{\ln t}{1+t^2}\right) dt = 0$$

■ 2 أ

لدينا الدالة : $t \to \dfrac{\ln t}{1+t^2}$ متصلة على $]0, +\infty[$

إذن فهي تقبل دالة أصلية $\psi$ على $]0, +\infty[$ بحيث :

$$\psi'(x) = \frac{\ln x}{1+x^2} \quad \text{و} \quad \psi(x) - \psi(0) = \int_0^x \left(\frac{\ln t}{1+t^2}\right) dt$$

بما أن : $F(x) = \psi(x) - \psi\left(\frac{1}{x}\right)$

فإن $F$ قابلة للإشتقاق على $]0, +\infty[$ لأنها مجموع دالة و مركب دالتين قابلتين للإشتقاق على $]0, +\infty[$

و لدينا : 

$$F'(x) = \psi'(x) + \left(\frac{1}{x}\right)' \psi'\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= \left(\frac{\ln x}{1+x^2}\right) - \left(\frac{-1}{x^2}\right)\left(\frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\right)$$

$$= \left(\frac{\ln x}{1+x^2}\right) - \left(\frac{\ln x}{1+x^2}\right) = 0$$

■ 2 ب

بما أن : $(\forall x \,\epsilon\, ]0, +\infty[) \; ; \; F'(x) = 0$

فإن : $(\forall x \,\epsilon\, ]0, +\infty[) \; ; \; F(x) = c \,\epsilon\, \mathbb{R}$

و بما أن : $F(1) = 0$ فإن $c = 0$

و بالتالي : $(\forall x \,\epsilon\, ]0, +\infty[) \; ; \; F(x) = 0$

■ 3

$$F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{x} \left(\frac{\ln t}{1+t^2}\right) dt = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{x} \underbrace{\left(\frac{1}{1+t^2}\right)}_{v'} \underbrace{(\ln t)}_{u} dt$$

$$\Leftrightarrow \quad F(x) = \left[(Arctan(t))(\ln t)\right]_{\frac{1}{x}}^{x} - \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{Arctan(t)}{t} dt$$

$$\Leftrightarrow \quad F(x) = \ln(x) \cdot Arctan(x) - ln\left(\frac{1}{x}\right) \cdot Arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{Arctan(t)}{t} dt$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{F(x) = \left(Arctan(x) + Arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right) \ln x - \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{Arctan(t)}{t} dt} \quad (*)$$

■ 4

نعتبر الدالة العددية $\varphi$ المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بما يلي :

$$\varphi(x) = Arctan\left(\frac{1}{x}\right) + Arctan(x)$$

لدينا $\varphi$ قابلة للإشتقاق على كل من المجالين $]-\infty, 0[$ و $]0, +\infty[$

لأنها تضم دوال اعتيادية كلها معرفة و قابلة للإشتقاق على $]-\infty, 0[$ و $]0, +\infty[$

و لدينا : 

$$\varphi'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' \left(\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\right) + \left(\frac{1}{1+x^2}\right)$$

$$= \left(\frac{-1}{x^2}\right)\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right) + \left(\frac{1}{1+x^2}\right)$$

$$= \frac{-1}{x^2+1} + \frac{1}{1+x^2} = 0$$

إذن $\varphi$ دالة ثابتة على كل من المجالين $]0,+\infty[$ و $]-\infty,0[$

أو بتعبير آخر :
$$\begin{cases} \forall x \in ]-\infty,0[ \ ; \ \varphi(x) = c_1 \in \mathbb{R} \\ \forall x \in ]0,+\infty[ \ ; \ \varphi(x) = c_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

نعوض $x$ بالقيمتين $1$ و $-1$ و ذلك من أجل إيجاد $c_1$ و $c_2$ نحصل على :

$$\begin{cases} c_1 = \varphi(-1) = 2Arctan(-1) = 2\left(\frac{-\pi}{4}\right) = \frac{-\pi}{2} \\ c_2 = \varphi(1) = 2Arctan(1) = 2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

و بالتالي :
$$\boxed{\varphi(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & ; \ \forall x > 0 \\ \frac{-\pi}{2} & ; \ \forall x < 0 \end{cases}}$$

ما يهمنا من هذه النتيجة هو : $(\forall x > 0) \ ; \ \varphi(x) = \frac{\pi}{2}$

$$\Leftrightarrow \quad (\forall x > 0) \ ; \ Arctan\left(\frac{1}{x}\right) + Arctan(x) = \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{(\forall x > 0) \ ; \ Arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - Arctan(x)} \quad (**)$$

■ **4**

نستغل إذن النتيجتين $(*)$ و $(**)$ في الإجابة على هذا السؤال.

لدينا : $(\forall x > 0) \ ; \ F(x) = 0$

إذن :

$$\left(Arctan(x) + Arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)\ln x - \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{Arctan(t)}{t} dt = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{\pi}{2}\right)\ln x - \int_{\frac{1}{x}}^{1} \frac{Arctan(t)}{t} dt = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{Arctan(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}\ln x$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{2}{\pi}\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{Arctan(t)}{t} dt = \ln x}$$

■ و الحمد لله رب العالمين ■