الإمتحان الوطني الموحد
لنيل شهادة البكالوريا
الدورة الاستدراكية 2012

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية و التعليم العالي و تكوين الأطر و البحث العلمي
المركز الوطني للتقويم و الإمتحانات

مادة الرياضيات
مسلك العلوم الرياضية أ و ب
المعامل 9
مدة الإنجاز : أربع ساعات

استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

التمرين الأول : (3,5 ن)

الجزءان (I) و (II) مستقلان .

(I) لكل a و b من المجال $I=[1;+\infty[$ نضع : $a\perp b=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-1\right)^2$

0,50 ن — ① بين أن : $\perp$ قانون تركيب داخلي في I .

0,50 ن — ② بين أن القانون $\perp$ تبادلي و تجميعي في I .

0,25 ن — ③ بين أن : $\perp$ يقبل عنصرا محايدا في I وجب تحديده.

(II) نذكر أن : $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية. لتكن : $E=\left\{M(x)=\begin{pmatrix}x & 2(x-1)\\ 0 & 1\end{pmatrix}\ /\ x\in\mathbb{R}^*\right\}$

0,50 ن — ① بين أن E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$

② نعتبر التطبيق φ المعرف بما يلي :

$$\begin{array}{rccc}\varphi : & \mathbb{R}^* & \to & E\\ & x & \to & M(x)\end{array}$$

0,50 ن — (أ) بين أن φ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحو $(E,\times)$.

0,50 ن — (ب) استنتج بنية $(E,\times)$.

0,75 ن — (ج) بين أن المجموعة : $H=\left\{\begin{pmatrix}2^n & 2^{n+1}-2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\ /\ n\in\mathbb{Z}\right\}$ زمرة جزئية من $(E,\times)$.

التمرين الثاني : (3,5 ن)

الجزءان (I) و (II) مستقلان .

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$.

(I) نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E)\ :\ z^2-4\left(1+\frac{2}{3}i\right)z+\frac{5}{3}+4i=0$

0,50 ن — ① (أ) تحقق أن العدد $z_1=1+\frac{2}{3}i$ حل للمعادلة (E) .

0,50 ن — (ب) بين أن الحل الثاني للمعادلة هو $z_2=3z_1$

(II) نعتبر ثلاث نقط A و B و Ω مختلفة مثنى مثنى ألحاقها على التوالي : a و b و ω .

ليكن r الدوران الذي مركزه Ω و زاويته $\frac{\pi}{3}$.

نضع : $P=r(A)$ و $B=r(Q)$

ليكن العدد العقدي p لحق النقطة P و العدد العقدي q لحق النقطة Q .

0,50 ن — ① (أ) بين أن : $p=\omega+e^{\frac{i\pi}{3}}(a-\omega)$ و $q=\omega+e^{\frac{-i\pi}{3}}(b-\omega)$

0,25 ن — (ب) بين أن : $\dfrac{1-e^{\frac{i\pi}{3}}}{1-e^{\frac{-i\pi}{3}}}=e^{\frac{4i\pi}{3}}$

ج) بين أن : $\frac{p-a}{q-b} = \left(\frac{\omega-a}{\omega-b}\right) e^{\frac{4i\pi}{3}}$ — 0,50 ن

2) نفترض أن : $\left(\frac{\omega-a}{\omega-b}\right) = e^{\frac{2i\pi}{3}}$

أ) بين أن : $APQB$ متوازي أضلاع . — 0,75 ن

ب) بين أن : $arg\left(\frac{b-a}{p-a}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ و استنتج أن الرباعي $APQB$ مستطيل . — 0,75 ن

التمرين الثالث : (3,0 ن)

1) أ) تحقق أن : 503 عدد أولي. — 0,25 ن

ب) بين أن $7^{502} \equiv 1[503]$ ثم استنتج أن $7^{2008} \equiv 1[503]$. — 0,75 ن

2) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $(E) \ : \ 49x - 6y = 1$ — 0,50 ن

علما أن الزوج $(1;8)$ حل خاص للمعادلة (E) ، حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) مبرزا مراحل الحل.

3) نضع : $N = 1 + 7 + 7^2 + \cdots + 7^{2007}$

أ) بين أن الزوج $(7^{2006}, N)$ حل للمعادلة (E) . — 0,25 ن

ج) استنتج أن N يقبل القسمة على 2012 — 0,25 ن

ب) بين أن $N \equiv 0[4]$ و $N \equiv 0[503]$ — 1,00 ن

التمرين الرابع : (7,5 ن)

(I) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $[0;+\infty[$ بما يلي : $g(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$

1) أدرس تغيرات الدالة g على المجال $[0;+\infty[$ — 0,50 ن

2) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $[0;+\infty[$. — 0,50 ن

(II) لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x) = e^x \ln(1+e^{-x})$

1) بين أن : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ — 1,00 ن

2) بين أنه لكل عدد حقيقي x لدينا : $f'(x) = e^x g(e^{-x})$ — 0,50 ن

3) ضع جدول تغيرات الدالة f — 0,50 ن

4) أنشئ $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة f و $(\mathscr{C}')$ الممثل للدالة $(-f)$ في نفس المعلم $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ — 1,00 ن

نقبل أن $-0{,}7$ قيمة مقربة لأفصول نقطة الإنعطاف الوحيدة للمنحنى $(\mathscr{C})$.

5) بين أن لكل x من $]-1;0[$ لدينا : $0 < f'(x) < g(e)$ — 0,75 ن

6) بين أن المعادلة $f(x) + x = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$. و أن : $-1 < \alpha < 0$ — 0,75 ن

⑦ نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_{n+1} = -f(u_n) \ ; \ \forall n\epsilon\mathbb{N} \\ u_0 = 0 \end{cases}$$

0,50 ن ‌أ) بين أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}) \ : \ -1 \leq u_n \leq 0$

0,50 ن ب) بين أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}) \ : \ |u_{n+1} - \alpha| \leq g(e)|u_n - \alpha|$

0,50 ن ج) استنتج أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}) \ : \ |u_n - \alpha| \leq (g(e))^n$

0,50 ن د) علما أن : $g(e) < 0,6$ أحسب : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

التمرين الخامس : (2,5 ن)

نعتبر الدالة العددية F المعرفة على $]0;+\infty[$ بما يلي :

$$F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{x} \left(\frac{\ln t}{1+t^2}\right) dt$$

0,25 ن ① أحسب $F(1)$.

0,50 ن ②أ) بين أن الدالة F قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$ و احسب $F'(x)$.

0,50 ن ب) استنتج أن لكل x من المجال $]0,+\infty[$ لدينا : $F(x) = 0$

0,50 ن ③ باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن لكل x من $]0,+\infty[$ لدينا :

$$F(x) = \left(Arctan(x) + Arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)\ln x - \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{Arctan\ (t)}{t} dt$$

0,25 ن ④ بين أن : $(\forall x > 0) \ : \ Arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - Arctan(x)$

0,50 ن ⑤ استنتج أن : $(\forall x > 0) \ : \ \ln x = \frac{2}{\pi}\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{Arctan\ (t)}{t} dt$