التمرين الأول : (3,5 ن)

■(I)1

$$I - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3-\sqrt{5}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3-\sqrt{5}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

■(I)2

لدينا حسب السؤال 1 : $A^2 = I - A$

إذن : $A(A+I) = A^2 + A = I$

و كذلك : $(A+I)A = A^2 + A = I$

و منه A مصفوفة قابلة للقلب و مقلوبها هو المصفوفة $(A+I)$

أي بتعبير آخر : $\boxed{A^{-1} = A + I}$

■(II)1

ليكن x و y عنصرين من $\mathbb{R}$.

لدينا :

$$(x^2-1)(y^2-1)+1 = (xy)^2 - x^2 - y^2 + 1 + 1 = x^2y^2 - x^2 - y^2 + 2$$

■(II)2

ليكن a و b عنصرين من $I =]1;+\infty[$

إذن : $a > 1$ و $b > 1$

و منه : $a^2 > 1$ و $b^2 > 1$

يعني : $(a^2-1) > 0$ و $(b^2-1) > 0$

$$\Leftrightarrow (b^2-1)(a^2-1) > 0$$
$$\Leftrightarrow (b^2-1)(a^2-1) + 1 > 1$$
$$\Leftrightarrow a^2b^2 - a^2 - b^2 + 2 > 1$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{a^2b^2 - a^2 - b^2 + 2} > 1$$
$$\Leftrightarrow a * b > 1$$
$$\Leftrightarrow \boxed{a * b \in I}$$

و منه $*$ قانون تركيب داخلي في I .

■(II)3 أ

ليكن x و y عنصرين من $\mathbb{R}_+^*$

لدينا :

$$\varphi(a) * \varphi(b) = \sqrt{a+1} * \sqrt{b+1} = \sqrt{(a+1)(b+1) - (a+1) - (b+1) + 2} = \sqrt{ab+1} = \varphi(a \times b)$$

إذن φ تشاكل من $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ نحو $(I,*)$

ليكن y عنصرا من I .

لدينا : $\varphi(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = y \Leftrightarrow x = y^2 - 1$

بما أن : $y > 1$ فإن : $y^2 - 1 > 0$ و منه $x \in \mathbb{R}_+^*$

و بما أن : $y^2 - 1$ عدد وحيد

فإن : $(\forall y \in I), (\exists! x = y^2 - 1) \; : \; \varphi(x) = y$

و منه φ تقابل من $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ نحو $(I,*)$

و تقابله العكسي معرف بما يلي :

$$\boxed{\begin{array}{llll} \varphi^{-1} : & (I,*) & \to & (\mathbb{R}_+^*, \times) \\ & y & \to & y^2 - 1 \end{array}}$$

و بالتالي φ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ نحو $(I,*)$.

■(II)3 ب

نعلم أن التشاكل التقابلي يحافظ على بنية الزمرة.

و لدينا : $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد بالقانون $\times$ هو العدد 1 و كل عنصر x يقبل مماثلا و هو مقلوبه $\frac{1}{x}$.

إذن : $(I,*)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد بالقانون $*$ هو العدد $\varphi(1)$ و كل عنصر y يقبل مماثلا و هو $Sym(y)$.

و لدينا : $\varphi(1) = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

و لدينا كذلك : $y \in I$

إذن يوجد x من $\mathbb{R}^*$ بحيث : $\boxed{y = \varphi(x) \Leftrightarrow x = \varphi^{-1}(y) = y^2 - 1}$

و منه :

$$\begin{aligned} Sym(y) &= Sym(\varphi(x)) \\ &= \varphi(Sym(x)) \\ &= \varphi\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \varphi\left(\frac{1}{y^2-1}\right) \\ &= \sqrt{\frac{1}{y^2-1}+1} = \sqrt{\frac{y^2}{y^2-1}} \end{aligned}$$

■(II)3ج

لدينا (Γ) جزء غير فارغ من I

لأنه إذا كان : $m \epsilon \mathbb{Z}$ فإن : $2^m > 0$

يعني : $2^m + 1 > 1$

يعني : $\sqrt{2^m+1} > 1$

يعني : $\sqrt{2^m+1}\ \epsilon\ I$

ليكن $\sqrt{1+2^m}$ و $\sqrt{1+2^n}$ عنصرين من (Γ)

لدينا :

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{1+2^m}\right) * \left(\sqrt{1+2^n}\right)' &= \left(\sqrt{1+2^m}\right) * \left(\sqrt{\frac{1+2^n}{2^n}}\right) \\ &= \sqrt{(1+2^m)\left(\frac{1+2^n}{2^n}\right) - (1+2^m) - \left(\frac{1+2^n}{2^n}\right) + 2} \\ &= \sqrt{2^{m-n}+1}\ \epsilon\ (\Gamma) \end{aligned}$$

و بالتالي $(\Gamma,*)$ زمرة جزئية من الزمرة $(I,*)$.

التمرين الثاني : (3,5 ن)

■(I)1

$$(E)\ :\ iz^2 + (2-i)az - (1+i)a^2 = 0$$

لدينا : $\Delta = (2-i)^2a^2 + 4i(1+i)a^2$

$\Delta = (ai)^2$

إذن المعادلة تقبل حلين عقديين z_1 و z_2 :

$$z_1 = \frac{(i-2)a+ai}{2i} = a(1+i)$$

$$z_2 = \frac{(i-2)a-ai}{2i} = ai$$

■(I)2أ

$$z_1z_2 = ai(a)(1+i)$$

$$\Leftrightarrow \quad z_1z_2 = a^2i - a^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{z_1z_2 = a^2(i-1)}$$

■(I)2ب

في البداية يجب كتابة z_1z_2 في شكله المثلثي.

لدينا : $z_1z_2 = a^2(i-1)$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \quad z_1z_2 = a^2\sqrt{2}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &\Leftrightarrow \quad z_1z_2 = a^2\sqrt{2}\left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &\Leftrightarrow \quad z_1z_2 = a^2\sqrt{2}\left(\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &\Leftrightarrow \quad z_1z_2 = a^2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) \\ &\Leftrightarrow \quad \boxed{z_1z_2 = a^2\sqrt{2}\ e^{\left(\frac{3\pi i}{4}\right)}} \end{aligned}$$

و لدينا : $z_1z_2\ \epsilon\ \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \quad arg(z_1z_2) \equiv 0[\pi] \\ &\Leftrightarrow \quad arg\left(a^2\sqrt{2}\ e^{\left(\frac{3\pi i}{4}\right)}\right) \equiv 0[\pi] \\ &\Leftrightarrow \quad arg(a^2\sqrt{2}\ ) + arg\left(e^{\left(\frac{3\pi i}{4}\right)}\right) \equiv 0[\pi] \\ &\Leftrightarrow \quad arg(a^2) + \frac{3\pi}{4} \equiv 0[\pi] \\ &\Leftrightarrow \quad 2\ arg(a) + \frac{3\pi}{4} \equiv 0[\pi] \\ &\Leftrightarrow \quad 2\ arg(a) \equiv \frac{-3\pi}{4}[\pi] \\ &\Leftrightarrow \quad \boxed{arg(a) \equiv \frac{-3\pi}{8}\left[\frac{\pi}{2}\right]} \end{aligned}$$

■(II)①(أ)

لدينا : $A(1)$ و $B(i+1)$ و $C(c)$ و $D(ic)$ و $M(z)$

ننطلق من المعلومة : " A و D و M نقط مستقيمية "

$$\Leftrightarrow \quad (AD) \parallel (AM)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{z_M - z_A}{z_D - z_A} \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad \overline{\left(\frac{z_M - z_A}{z_D - z_A}\right)} = \frac{z_M - z_A}{z_D - z_A}$$

$$\Leftrightarrow \quad \overline{\left(\frac{z-1}{ic-1}\right)} = \frac{z-1}{ic-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\bar{z}-1}{-ic-1} = \frac{z-1}{ic-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad (ic-1)(\bar{z}-1) + (z-1)(ic+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \bar{z}ic - ic - \bar{z} + 1 + zic + z - ic - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\bar{z}(ic-1) + z(ic+1) = 2ic}$$

■(II)①(ب)

$$(AD) \perp (OM) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{z_M - z_O}{z_D - z_A} \in i\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad \overline{\left(\frac{z_M - z_O}{z_D - z_A}\right)} = -\left(\frac{z_M - z_O}{z_D - z_A}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \overline{\left(\frac{z-0}{ic-1}\right)} = -\left(\frac{z-0}{ic-1}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\bar{z}}{-ic-1} = \frac{-z}{ic-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \bar{z}(ic-1) = z(ic+1)$$

$$\Leftrightarrow \quad z(ic-1) - \bar{z}(ic-1) = 0$$

■(II)②(أ)

لدينا H هي المسقط العمودي للنقطة O على (AD)

يعني : $\boxed{\begin{cases} (AD) \perp (OH) \\ (AD) \parallel (AH) \end{cases}}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{z_H - z_O}{z_D - z_A}\right) \in i\mathbb{R} \\ \left(\dfrac{z_H - z_A}{z_D - z_A}\right) \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{\left(\dfrac{z_H - z_O}{z_D - z_A}\right)} = -\left(\dfrac{z_H - z_O}{z_D - z_A}\right) \\ \overline{\left(\dfrac{z_H - z_A}{z_D - z_A}\right)} = \left(\dfrac{z_H - z_A}{z_D - z_A}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{\left(\dfrac{h-0}{ic-1}\right)} = -\left(\dfrac{h-0}{ic-1}\right) \\ \overline{\left(\dfrac{h-1}{ic-1}\right)} = \left(\dfrac{h-1}{ic-1}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{\bar{h}}{-ic-1}\right) = -\left(\dfrac{h}{ic-1}\right) \\ \left(\dfrac{\bar{h}-1}{-ic-1}\right) = \left(\dfrac{h-1}{ic-1}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \bar{h}(ic-1) = h(ic+1) \\ (\bar{h}-1)(ic+1) = -(h-1)(ic+1) \end{cases}$$

من المعادلة الثانية من النظمة نستنتج ما يلي :

$$\bar{h}(ic-1) = (ic-1) - (h-1)(ic+1)$$

نعوض في المعادلة الأولى نحصل على :

$$(ic-1) - (h-1)(ic+1) = h(ic+1)$$

بعد النشر و التبسيط نحصل على : $2ic - 2h - 2hic = 0$

نضرب طرفي هذه المتساوية في العدد الغير المنعدم $\frac{i}{2c}$ نحصل على :

$$-1 - \frac{hi}{c} + h = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad h - 1 = \frac{hi}{c}$$

نضيف إلى كل من الطرفين العدد $-i$ نحصل على :

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{h - (1+i) = \frac{i}{c}(h-c)}$$

■(II)②(ب)

لدينا : $h - (1+i) = \dfrac{i}{c}(h-c)$

يعني : $\dfrac{h-(1+i)}{h-c} = \dfrac{i}{c}$

لدينا :
$$\left(\frac{z_H - z_B}{z_A - z_C}\right) = -\left(\frac{h-(1+i)}{h-c}\right) = \frac{-i}{c} = -\left(\frac{z_H - z_B}{z_A - z_C}\right)$$

و منه : $\boxed{(CH) \perp (BH)}$

التمرين الثالث : (3,0 ن)

1 أ

باستعمال خوارزمية إقليدس نحدد $195 \wedge 143$ بالطريقة التالية :

195	143
52	1

لدينا : $52 \neq 0$ إذن نواصل .

143	52
39	2

لدينا : $39 \neq 0$ إذن نواصل .

52	39
13	1

لدينا : $13 \neq 0$ إذن نواصل .

39	13
0	3

لدينا : $0 = 0$ إذن **نتوقف** .

إذن القاسم المشترك الأكبر للعددين 143 و 195 هو آخر باقي غير منعدم : 13

بتعبير آخر : $\boxed{195 \wedge 143 = 13}$ (1)

من النتيجة (1) نستنتج وجود عددين نسبيين k و u بحيث : $143u + 195k = 13$

نضع : $v = -k$ إذن : $143u - 195v = 13$

و بما أن : $13 \setminus 52$ فإن : $(143u - 195v) \setminus 52$

و منه : $(\exists w \epsilon \mathbb{Z})\ ;\ 52 = (143u - 195v)w$

أي : $(\exists\, x, y \,\epsilon\, \mathbb{Z})\ ;\ 52 = 143\underbrace{uw}_{x} - 195\underbrace{vw}_{y}$

و بالتالي : $(\exists\, x, y \,\epsilon\, \mathbb{Z})\ ;\ 52 = 143x - 195y$

أي أن المعادلة أعلاه تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$.

1 ب

لدينا $(-1,-1)$ حل خاص للمعادلة (E)

يعني : $\boxed{143(-1) - 195(-1) = 52}$ $(*)$

ليكن (x,y) الحل العام للمعادلة (E) .

يعني : $\boxed{143x - 195y = 52}$ $(**)$

ننجز عملية الفرق بين المتساويتين $(*)$ و $(**)$ طرفا بطرف نحصل على :

$$143(-1-x) - 195(-1-y) = 0$$

يعني : $143(x+1) = 195(y+1)$

لدينا : $195 = 15 \times 13$ و $143 = 11 \times 13$

نحصل على : $11(x+1) = 15(y+1)$

و منه : $11 \setminus 15(y+1)$

و بما أن : $11 \wedge 15 = 1$ فإنه حسب $(Gauss)$: $11 \setminus (y+1)$

و منه : $(\exists k \epsilon \mathbb{Z})\ ;\ y + 1 = 11k$

أي : $(\exists k \epsilon \mathbb{Z})\ ;\ y = 11k - 1$

نعوض y في المتساوية $(**)$ نحصل على : $x = 15k - 1$

عكسيا : لدينا $\forall k \epsilon \mathbb{Z}\ ;\ 143(15k-1) - 195(11k-1) = 52$

و بالتالي مجموعة حلول المعادلة (E) تكتب على الشكل :

$$\boxed{\mathcal{S} \ :\ \{(15k-1\,;11k-1)\ ;\ k\epsilon\mathbb{Z}\}}$$

2

لدينا $n \wedge 5 = 1$ بحيث $n \epsilon \mathbb{N}^*$

لدينا 5 عدد أولي و لا يقسم n .

إذن حسب مبرهنة $(Fermat)$: $n^{5-1} \equiv 1[5]$

يعني : $n^4 \equiv 1[5]$

و منه : $(\forall k \epsilon \mathbb{N})\ ;\ (n^4)^k \equiv 1^k[5]$

يعني : $(\forall k \epsilon \mathbb{N})\ ;\ n^{4k} \equiv 1[5]$

3 أ

لدينا : $x \equiv y[4]$

$\Leftrightarrow \quad 4 \setminus (x-y)$

$\Leftrightarrow \quad (\exists k \epsilon \mathbb{Z})\ :\ (x-y) = 4k$

و منه حسب نتيجة السؤال 2 : $n^{x-y} = n^{4k} \equiv 1[5]$

إذن : $n^x \cdot n^{-y} \equiv 1[5]$

و بما أن : $n^y \equiv n^y[5]$

فإنه عند المرور إلى الجداء بين آخر متوافقتين نحصل على :

$$n^x \cdot n^{-y} \cdot n^y \equiv n^y[5]$$

أي : $\boxed{n^x \equiv n^y[5]}$ $(\otimes)$

3 ب

لدينا : $x \equiv y[4]$

$\Leftrightarrow \quad (\exists k \epsilon \mathbb{Z})\ :\ (x-y) = 4k$

$\Leftrightarrow \quad (\exists\ k' = 2k\ \epsilon \mathbb{Z})\ :\ (x-y) = 2k'$

إذن $x - y$ عدد زوجي .

و منه x و y فرديان معا أو زوجيان معا.

نقوم بدمج هاتين الحالتين مع حالتي زوجية العدد n لنحصل على أربع حالات و كلها تعبر عن زوجية التعبير $(n^x - n^y)$

(عدد زوجي) = (عدد زوجي)^(عدد زوجي) - (عدد زوجي)^(عدد زوجي)
(عدد زوجي) = (عدد زوجي)^(عدد فردي) - (عدد زوجي)^(عدد فردي)
(عدد زوجي) = (عدد فردي)^(عدد زوجي) - (عدد فردي)^(عدد زوجي)
(عدد زوجي) = (عدد فردي)^(عدد فردي) - (عدد فردي)^(عدد فردي)

نستنتج من هاته الحالات الأربع أن العدد $(n^x - n^y)$ عدد زوجي دائما

و ذلك كيفما كانت زوجية الأعداد x و y و n

و منه : $\boxed{(\exists u\in\mathbb{Z})\ ;\ n^x - n^y = 2u}$ (⊙)

من النتيجتين ⊗ و ⊙ نستنتج أن : $\begin{cases}2 \backslash (n^x-n^y)\\ 5\backslash(n^x-n^y)\end{cases}$

إذن : $2\times5 \backslash (n^x-n^y)$ لأن 2 و 5 عددان أوليان.

و بالتالي : $\boxed{n^x \equiv n^y[10]}$

■ 4

لدينا (x,y) حل للمعادلة (E) .

يعني : $(\exists k\in\mathbb{Z})\ ;\ x=15k-1$ و $y = 11k-1$

لدينا : $(15k-1)\equiv(11k-1)[4]$ لأن : $4\backslash(4k)$

و منه : $x\equiv y[4]$

إذن حسب نتيجة السؤال 3 ب : $n^x\equiv n^y[10]$

و هذا يعني أن n^x و n^y لهما نفس رقم الوحدات في نظمة العدد العشري

أو بتعبير آخر نضع : $n^x = \overline{\alpha\beta}^{(10)}$ و $n^y=\overline{ms}^{(10)}$

رقم وحدات n^x هو العدد β و رقم وحدات n^y هو s

لدينا : $n^x\equiv n^y[10]$ يعني : $\overline{\alpha\beta}^{(10)} \equiv \overline{ms}^{(10)}[10]$

يعني : $10m+s\equiv 10\alpha+\beta[10]$

يعني : $s\equiv\beta[10]$

يعني : $\boxed{s=\beta}$ لأن : $s<10$ و $\beta<10$

التمرين الرابع : (5,5 ن)

■ 1

$$\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{e^{-x}}{n}\right) = (+\infty)+0 = (+\infty)$$

$$\lim_{x\to-\infty} f_n(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(x+\frac{e^{-x}}{n}\right)$$
$$= \lim_{x\to-\infty} e^{-x}\left(xe^{x}+\frac{1}{n}\right)$$
$$= (+\infty)\left(0^- + \frac{1}{n}\right) = \boxed{+\infty}$$

■ 2 أ

لدينا : $\lim_{x\to-\infty}\frac{f_n(x)}{x} = -\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f_n(x) = +\infty$

إذن : $(\mathscr{C}_n)$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب بجوار $-\infty$

و لدينا : $\lim_{x\to+\infty}\frac{f_n(x)}{x} = 1$ و $\lim_{x\to+\infty}(f_n(x)-x) = 0$

إذن $y = x$ مقارب مائل بجوار $+\infty$ للمنحنى $(\mathscr{C}_n)$

■ 2 أ

لدينا $f_n(x) - y = \dfrac{e^{-x}}{n} > 0$

إذن المنحنى $(\mathscr{C}_n)$ يوجد فوق المستقيم (D)

■ 3

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$.

لدينا : $f_n'(x) = 1 - \dfrac{e^{-x}}{n} = \dfrac{n-e^{-x}}{n}$

إذا كان $x = -\ln n$ فإن $f_n'(x) = 0$

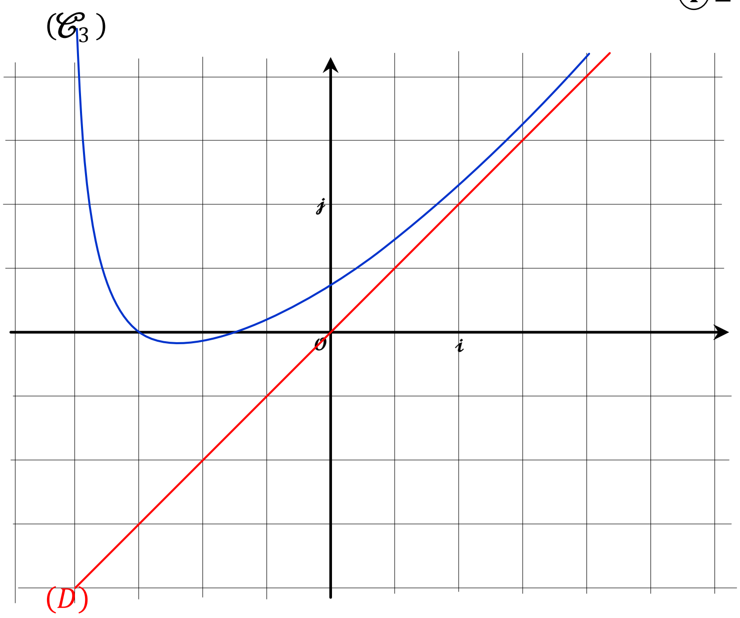
إذا كان $x > -\ln n$ فإن $f_n'(x) > 0$

إذا كان $x < -\ln n$ فإن $f_n'(x) < 0$

و لدينا : $f_n(-\ln n) = -\ln n + \frac{1}{n}e^{\ln n} = \ln\left(\frac{e}{n}\right)$

x	$-\infty$	$-\ln n$	$+\infty$
$f_n'(x)$	$-$	0	$+$
f_n	$+\infty$ ↘	$\ln\left(\frac{e}{n}\right)$	↗ $+\infty$

■ 4



■ 5 أ

نعتبر الدالة العددية φ المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي :

$$\varphi(x) = \ln x - \frac{e}{x}$$

φ دالة قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$ لأنها فرق دالتين قابلتين للإشتقاق على $]0,+\infty[$

و لدينا : $\varphi'(x) = \dfrac{x+e}{x^2} > 0$

إذن φ دالة تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$

و لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln x-\frac{e}{x}\right)=+\infty$

و $\lim\limits_{x\to0^+}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\ln x-\frac{e}{x}\right)=-\infty$

و لدينا كذلك : $\varphi(3)\approx 0,2>0$

نحصل إذن على الجدول التالي :

x	0	3	$+\infty$
$\varphi'(x)$	$+$		$+$
φ	$-\infty$	$0,2$	$+\infty$

نلاحظ من خلال هذا الجدول أن : $(\forall x\ge3)\ ;\ \varphi(x)>0$

إذن : $\boxed{(\forall n\ge3)\ ;\ \ln n>\frac{e}{n}}$

■ 5 ب

المرحلة الأولى :

لدينا f_n دالة تزايدية قطعا على $[-\ln n\,;+\infty[$

من أجل $n\ge3$ وجدنا أن $\ln n>\frac{e}{n}$ و منه : $-\ln n<\frac{-e}{n}$

إذن : $\left[\frac{-e}{n}\,;+\infty\right[\subset[-\ln n\,;+\infty[$

أي : f_n دالة تزايدية قطعا على $\left[\frac{-e}{n}\,;+\infty\right[$

و بالأخص f_n دالة تزايدية قطعا على $\left[\frac{-e}{n};0\right]$ لأن : $\left[\frac{-e}{n};0\right]\subset\left[\frac{-e}{n};+\infty\right[$

و بالتالي : $\boxed{f_n \text{ تقابل من } \left[\frac{-e}{n};0\right] \text{ نحو صورته } f_n\left(\left[\frac{-e}{n};0\right]\right)}$.(1)

من جهة ثانية لدينا : $\boxed{f_n(0)=\frac{1}{n}>0}$ لأن : $n\ge3$
(2)

و لدينا كذلك : $f_n\left(\frac{-e}{n}\right)=\frac{-e}{n}+\frac{1}{n}\left(e^{\frac{e}{n}}\right)$

لدينا : $n\ge3$ إذن : $\frac{e}{n}\le\frac{e}{3}$

و بما أن : $\frac{e}{3}<1$ فإن : $\frac{e}{n}<1$

و منه : $\frac{e^{\frac{e}{n}}}{n}<\frac{e}{n}$ يعني : $\left(\frac{e^{\frac{e}{n}}}{n}-\frac{e}{n}\right)<0$

إذن : $\boxed{f_n\left(\frac{-e}{n}\right)<0}$ (3)

من (2) و (3) نستنتج أن : $\boxed{f_n(0)\cdot f_n\left(\frac{-e}{n}\right)<0}$ (4)

و من (1) و (4) نستنتج حسب مبرهنة القيم الوسيطية أن :

$$\boxed{\exists!\ y_n\in\left]\frac{-e}{n};0\right[\ :\ f_n(y_n)=0}$$

المرحلة الثانية :

لدينا f_n دالة متصلة و تناقصية قطعا على المجال $]-\infty\,;-\ln n]$.

إذن f_n تقابل من $]-\infty\,;-\ln n]$ نحو صورته $f_n(]-\infty\,;-\ln n])$

و لدينا : $f_n(]-\infty\,;-\ln n])=\left[\ln\left(\frac{e}{n}\right)\,;+\infty\right[$

إذن f_n تقابل من المجال $]-\infty\,;-\ln n]$ نحو المجال $\left[\ln\left(\frac{e}{n}\right)\,;+\infty\right[$

من أجل $n\ge3$ لدينا : $\ln n\ge\ln3\approx1,09$

إذن : $\ln n>1$ و منه : $1-\ln n<0$

و منه : $\ln\left(\frac{e}{n}\right)<0$ لأن : $\ln\left(\frac{e}{n}\right)=1-\ln n$

من هذه النتيجة نستنتج أن : $0\in\left]\ln\left(\frac{e}{n}\right)\,;+\infty\right[$

إذن 0 يمتلك سابقا واحدا x_n بالتقابل f_n

أو بتعبير آخر : $\exists!\ x_n\in]-\infty\,;-\ln n]\ :\ f_n(x_n)=0$

أي : $\boxed{\exists!\ x_n\le-\ln n\ :\ f_n(x_n)=0}$

■ 5 ج

لدينا : $x_n\le-\ln n$ يعني : $x_n\le\ln\left(\frac{1}{n}\right)$

و لدينا : $\lim\limits_{n\infty}\ln\left(\frac{1}{n}\right)=-\infty$

إذن بالضرورة : $\boxed{\lim\limits_{n\infty}x_n=-\infty}$

و لدينا : $\frac{-e}{n}\le y_n\le0$

بما أن : $\lim\limits_{n\infty}\left(\frac{-e}{n}\right)=\lim\limits_{n\infty}0=0$

فإن : $\boxed{\lim\limits_{n\infty}y_n=0}$

■ 6 أ

لدينا : $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(-1-x\ln x)=-1=g(0)$

إذن : g دالة متصلة على اليمين في الصفر .

■ 6 ب

لدينا حسب السؤال 5 ب : $f_n(x_n)=0$

إذن : $x_n+\frac{e^{-x_n}}{n}=0$ و منه : $x_n=\frac{-e^{-x_n}}{n}$

أي : $\boxed{\frac{-1}{x_n}=ne^{x_n}}$ $(*)$

يعني : $g\left(\frac{-1}{x_n}\right)=g(ne^{x_n})$

$$\begin{aligned}&=-1-ne^{x_n}\ln(ne^{x_n})\\&=-1-\boxed{ne^{x_n}}(\ln n+x_n)\\&=-1-\boxed{-\frac{1}{x_n}}(\ln n+x_n)\\&=\boxed{-1+\frac{1}{x_n}(\ln n+x_n)}\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad g\left(\frac{-1}{x_n}\right) = -1 + \frac{\ln n}{x_n} + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad g\left(\frac{-1}{x_n}\right) = \boxed{\frac{\ln n}{x_n}}$$

■ 6 ج

بما أن : $g\left(\frac{-1}{x_n}\right) = \frac{\ln n}{x_n}$

فإن : $\lim_{n\to+\infty} g\left(\frac{-1}{x_n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln n}{x_n}\right)$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{\substack{n\to+\infty \\ u=\frac{-1}{x_n}}} g(u) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln n}{x_n}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad g(0) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln n}{x_n}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln n}{x_n}\right) = -1}$$

التمرين الخامس : (4,5 ن)

■ 1

ليكن $x \in [0;1]$ و $t \in [0;x]$

لدينا : $0 \leq t \leq x$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \leq 2t \leq 2x$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 \leq 2t+1 \leq 2x+1$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{1}{2x+1} \leq \frac{1}{2t+1} \leq 1}$$

■ 2 أ

ليكن x عنصرا من $]0;1]$

$$\frac{2}{x^2}\int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right) dt = \frac{1}{x^2}\int_0^x \left(\frac{2t}{1+2t}\right) dt$$

$$= \frac{1}{x^2}\int_0^x \left(\frac{2t+1-1}{1+2t}\right) dt$$

$$= \frac{1}{x^2}\int_0^x \left(\frac{2t+1}{1+2t} - \frac{1}{1+2t}\right) dt$$

$$= \frac{1}{x^2}\int_0^x \left(1 - \frac{1}{1+2t}\right) dt$$

$$= \frac{1}{x^2}\int_0^x 1\, dt - \frac{1}{2x^2}\int_0^x \left(\frac{2}{2t+1}\right) dt$$

$$= \frac{1}{x^2}[t]_0^x - \frac{1}{2x^2}[\ln(2t+1)]_0^x$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{\ln(2x+1)}{2x^2} = F(x)$$

■ 2 ب

لدينا حسب السؤال 1 :

$$\frac{1}{2x+1} \leq \frac{1}{2t+1} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{t}{2x+1} \leq \frac{t}{2t+1} \leq t$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2}{x^2}\int_0^x \left(\frac{t}{2x+1}\right) dt \leq \frac{2}{x^2}\int_0^x \left(\frac{t}{2t+1}\right) dt \leq \frac{2}{x^2}\int_0^x t\, dt$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2}{x^2(1+2x)}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x \leq F(x) \leq \frac{2}{x^2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2x^2}{2x^2(1+2x)} \leq F(x) \leq \left(\frac{x^2}{2}\right)\frac{2}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{1}{(1+2x)} \leq F(x) \leq 1}$$

و بما أن : $\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{1+2x}\right) = \lim_{x\to0^+} 1 = 1$

فإن : $\lim_{x\to0^+} F(x) = 1 = F(0)$

و بالتالي : F دالة متصلة على اليمين في الصفر.

■ 3

لدينا : $\int_0^x \left(\frac{2t}{2t+1}\right) dt = \int_0^x \underbrace{(2t)}_{u'}\underbrace{\left(\frac{1}{2t+1}\right)}_{v} dt$

$$= \left[\frac{t^2}{2t+1}\right]_0^x - \int_0^x \frac{-2t^2}{(2t+1)^2} dt$$

$$= \frac{x^2}{2x+1} + 2\int_0^x \left(\frac{t}{2t+1}\right)^2 dt$$

■ 4 أ

في البداية لدينا : $h \ : \ x \ \to \ \dfrac{x}{1+2x}$

و هي دالة متصلة على $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{-1}{2}\right\}$ و بالأخص على المجال $]0;x]$

بحيث : $0 \leq x \leq 1$

إذن : h تقبل دالة أصلية نرمز لها بالرمز H بحيث : $H'(x) = h(x)$

لدينا إذن : $F(x) = \dfrac{2}{x^2}\displaystyle\int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right) dt$

$$\Leftrightarrow \quad F(x) = \frac{2}{x^2} H(x)$$

$$\Rightarrow \quad F'(x) = \left(\frac{2}{x^2}\right)' H(x) + \left(\frac{2}{x^2}\right) H'(x)$$

$$\Rightarrow \quad F'(x) = \left(\frac{-4x}{x^4}\right)\int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right) dt + \left(\frac{2}{x^2}\right)\left(\frac{x}{1+2x}\right)$$

$$\Rightarrow \quad F'(x) = \left(\frac{-2}{x^3}\right)\int_0^x \left(\frac{2t}{1+2t}\right) dt + \frac{2}{x(1+2x)}$$

بعد ذلك نستعمل نتيجة السؤال 3 نحصل على :

$$F'(x) = \left(\frac{-2}{x^3}\right)\left(\frac{x^2}{2x+1} + 2\int_0^x \left(\frac{t}{2t+1}\right)^2 dt\right) + \frac{2}{x(1+2x)}$$

$$= \frac{-2}{x(1+2x)} - \frac{4}{x^3}\int_0^x \left(\frac{t}{2t+1}\right)^2 dt + \frac{2}{x(1+2x)}$$

و بالتالي : $\boxed{F'(x) = \dfrac{-4}{x^3}\displaystyle\int_0^x \left(\frac{t}{2t+1}\right)^2 dt}$

■ 4 ب

لدينا حسب السؤال 1 : $\dfrac{1}{2x+1} \leq \dfrac{1}{2t+1} \leq 1$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{t}{2x+1} \leq \frac{t}{2t+1} \leq t \quad ; (\forall t \geq 0)$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{t}{2x+1}\right)^2 \leq \left(\frac{t}{2t+1}\right)^2 \leq t^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_0^x \left(\frac{t}{2x+1}\right)^2 dt \leq \int_0^x \left(\frac{t}{2t+1}\right)^2 dt \leq \int_0^x t^2\, dt$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{-4}{x^3}\int_0^x \left(\frac{t}{2x+1}\right)^2 dt \geq F'(x) \geq \frac{-4}{x^3}\int_0^x t^2\, dt$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{-4}{x^3(1+2x)^2}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^x \geq F'(x) \geq \frac{-4}{x^3}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^x$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{-4}{3(1+2x)^2} \geq F'(x) \geq \frac{-4}{3}}$$

■ 4 ج

لدينا : $F(x) = \dfrac{2}{x^2} H(x)$

بحيث : $H(x) = \displaystyle\int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right) dt$

نلاحظ أن F دالة متصلة على $[0;x]$ و قابلة للإشتقاق على $]0;x[$ لإنها جداء دالتين متصلتين و قابلتين للإشتقاق

إذن حسب مبرهنة التزايدات المنتهية :

$$\exists\, c \in]0,x[\ ; \ F'(c) = \frac{F(x)-F(0)}{x-0}$$

و بما أن : $\forall\, c \in]0,1] \ ; \ \dfrac{-4}{3} \leq F'(x) \leq \dfrac{-4}{3(1+2x)^2}$

فإن : $\dfrac{-4}{3} \leq F'(c) \leq \dfrac{-4}{3(1+2x)^2}$

لأن : $0 < c < x < 1$

ومنه : $\dfrac{-4}{3} \leq \left(\dfrac{F(x)-F(0)}{x-0}\right) \leq \dfrac{-4}{3(1+2x)^2}$

بما أن : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{-4}{3}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{-4}{3(1+2x)^2}\right) = \frac{-4}{3}$

فإن : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{F(x)-F(0)}{x-0}\right) = \frac{-4}{3}$

و بالتالي : F دالة قابلة للإشتقاق على اليمين في الصفر.

و لدينا : $\boxed{F'_d(0) = \dfrac{-4}{3}}$

■ و الحمد لله رب العالمين ■