المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية و التعليم العالي وتكوين الأطر والبحث العلمي
المركز الوطني للتقويم و الامتحانات

الامتحان الوطني الموحد لنيل شهادة البكالوريا
الدورة الاستدراكية 2007

مادة الرياضيات
مسلك العلوم الرياضية أ و ب
المعامل 10
مدة الإنجاز : أربع ساعات

استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

## التمرين الأول : ( 3,0 ن )

نعتبر في $\mathbb{Z}$ النظمة $(\mathcal{S})$ التالية : $\begin{cases} x \equiv a[p] \\ x \equiv b[q] \end{cases}$ بحيث : $\begin{cases} a,b,p,q \in \mathbb{Z} \\ p \wedge q = 1 \end{cases}$

0,50 ن — 1 (أ) بين أنه يوجد زوج $(u_0, v_0)$ من $\mathbb{Z}^2$ بحيث : $pu_0 + qv_0 = 1$ .

0,50 ن — (ب) بين أن $x_0 = bpu_0 + aqv_0$ حل للنظمة $(\mathcal{S})$ .

0,50 ن — 2 ليكن $x$ حلا للنظمة $(\mathcal{S})$ ، بين أن العدد $pq$ يقسم العدد $x - x_0$

0,50 ن — 3 ليكن $x$ عددا صحيحا نسبيا بحيث : $pq$ يقسم العدد $x - x_0$ . بين أن $x$ حل للنظمة $(\mathcal{S})$ .

0,50 ن — 4 استنتج مجموعة حلول النظمة $(\mathcal{S})$ .

0,50 ن — 5 حل في $\mathbb{Z}$ النظمة التالية : $\begin{cases} x \equiv 1[8] \\ x \equiv 3[13] \end{cases}$

## التمرين الثاني : ( 2,0 ن )

ليكن $n$ عددا صحيحا طبيعيا فرديا أكبر أو يساوي 3 . نتوفر على $n$ صندوقا مرقما من 1 إلى $n$ . الصندوق رقم $k$ بحيث : $(1 \leq k \leq n)$ يحتوي على $k$ كرة بيضاء و $(n-k)$ كرة سوداء.

نختار عشوائيا صندوقا من بين الصناديق ثم نسحب منه كرة واحدة .

0,50 ن — 1 أحسب احتمال الحصول على كرة بيضاء.

0,75 ن — 2 أحسب احتمال أن يتم السحب من صندوق رقمه فردي.

0,75 ن — 3 أحسب احتمال الحصول على كرة بيضاء ، علما أن السحب تم من صندوق رقمه عدد فردي .

## التمرين الثالث : ( 2,0 ن )

المستوى العقدي $(P)$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

نعتبر المجموعة : $(\mathcal{H}) = \{M(z) \in (P) / z^2 + \bar{z}^2 - |z|^2 = 1\}$

0,25 ن — 1 (أ) حدد معادلة ديكارتية للمجموعة $(\mathcal{H})$ .

0,50 ن — (ب) بين أن $(\mathcal{H})$ هذلول و حدد مركزه و رأسيه و مقاربيه في المعلم $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

0,25 ن — (ج) أنشيء $(\mathcal{H})$ .

2 $M(a)$ و $M(b)$ نقطتان من $(\mathcal{H})$ . نضع : $\varphi(a,b) = a\bar{b} + \bar{a}b - \overline{ab}$ .

0,50 ن — (أ) بين أن : $M(\varphi(a,b)) \in (\mathcal{H})$

0,50 ن — (ب) تحقق أن $\varphi(a,1) = 1$ و أن $\varphi(a,\bar{a}) = 1$ .

1,00 ن — 3 نزود $(\mathcal{H})$ بقانون التركيب الداخلي $(*)$ حيث لكل $M(a)$ و $M(b)$ من $(\mathcal{H})$: $M(a) * M(b) = M(\varphi(a,b))$ .

بين أن : $((\mathcal{H}), *)$ زمرة تبادلية .

## التمرين الرابع : ( 3,0 ن )

$\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ مجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة 2 . نذكر أن $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي .

نعتبر المجموعة التالية : $\mathcal{F}=\left\{\mathcal{M}(a,b)=\begin{pmatrix}a+b & -b\\ 5b & a-3b\end{pmatrix}/(a,b)\epsilon\mathbb{R}^2\right\}$

و هي مزودة بجمع المصفوفات $(+)$ و ضرب مصفوفة في عدد حقيقي $(\cdot)$ و ضرب المصفوفات $(\times)$ .

نضع : $I=\mathcal{M}(1,0)$ و $J=\mathcal{M}(0,1)$ و $O=\mathcal{M}(0,0)$

0,50 ن ① (أ) بين أن : $(\mathcal{F},+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي .

0,50 ن (ب) بين أن $(I,J)$ أساس للفضاء المتجهي $(\mathcal{F},+,\ \cdot)$ و اعط بعده .

0,50 ن ② ليكن $\alpha$ عددا عقديا لا ينتمي إلى $\mathbb{R}$ ، بين أن الأسرة $(1,\alpha)$ أساس للفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathbb{C},+,\ \cdot)$ .

③ نعتبر التطبيق $\psi$ من $\mathbb{C}$ نحو $\mathcal{F}$ المعرف بما يلي : $\psi(z)=\mathcal{M}(m,n)$ .

بحيث : $z=m+\alpha n$ و $m\epsilon\mathbb{R}$ و $n\epsilon\mathbb{R}$ و $z\epsilon\mathbb{C}$ .

0,50 ن (أ) تحقق أن $J^2=-2(I+J)$ و $\psi(\alpha)=J$

0,50 ن (ب) حدد قيمتي $\alpha$ التي يكون من أجلها التطبيق $\psi$ تشاكلا تقابليا من $(\mathbb{C},\times)$ نحو $(\mathcal{F},\times)$ .

0,50 ن ④ نأخذ : $\alpha=-1+i$ . أكتب في الأساس $(I,J)$ المصفوفة $J^{2007}$ .

## التمرين الخامس : ( 9,0 ن )

**(I)** لتكن $g$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $g(x)=1+x-e^{-x}$ .

0,50 ن ① (أ) أدرس تغيرات الدالة $g$ على $\mathbb{R}$ .

0,50 ن (ب) أحسب $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ و ضع جدول تغيرات الدالة $g$ .

0,50 ن (ج) استنتج أن $x_0=0$ هو الحل الوحيد للمعادلة $g(x)=0$ .

0,50 ن ② لتكن $f$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بما يلي : $f(x)=\dfrac{1}{1+x-e^{-x}}$

$(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة $f$ في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ .

0,50 ن (أ) أحسب النهايات التالية : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to0^+} f(x)$ و $\lim_{x\to0^-} f(x)$

0,25 ن (ب) أحسب $f'(x)$ لكل $x$ من $\mathbb{R}^*$ .

0,50 ن (ج) ضع جدول تغيرات الدالة $f$ .

0,50 ن (د) أنشئ $(\mathscr{C})$ .

0,50 ن ③ (أ) ليكن $n$ من $\mathbb{N}^*$ ، بين أن المعادلة $f(x)=n$ تقبل حلا وحيدا $x_n$ في المجال $]0,+\infty[$ .

0,50 ن (ب) بين أن المتتالية $(x_n)_{n\geq1}$ تناقصية و أنها متقاربة .

0,50 ن (ج) أثبت أن : $\lim_{n\to+\infty} x_n=0$

0,25 ن | $(II)$ ① (أ) بين أن المعادلة $f(x)=1$ تكافئ المعادلة $e^x=x$

0,50 ن | (ب) بين أن المعادلة $e^x=x$ تقبل حلا وحيدا هو $\alpha=x_1$ بحيث : $\frac{1}{e}\leq\alpha\leq 1$

② تعتبر المتتالية $(y_n)_{n\geq1}$ المعرفة بما يلي $y_1=1$ و $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)\ :\ y_{n+1}=e^{-y_n}$

0,50 ن | (أ) بين أن لكل $n$ من $\mathbb{N}^*$ : $\frac{1}{e}\leq y_n\leq 1$

0,50 ن | (ب) بين أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)\ :\ |y_{n+1}-\alpha|\leq e^{-\left(\frac{1}{e}\right)}|y_n-\alpha|$

0,50 ن | (ج) استنتج أن : $(y_n)_{n\geq1}$ متقاربة محددا نهايتها .

$(III)$ لتكن $\mathcal{F}$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}_+$ بما يلي :

$$\mathcal{F}(0)=\frac{1}{2}\ln 2 \quad \text{و} \quad (\forall x>0)\ :\ \mathcal{F}(x)=\int_x^{2x}f(t)dt$$

0,25 ن | ① (أ) بين أن ——— $(\forall t>0)\ :\ \frac{1}{1+t}<f(t)<\frac{1}{t}$

0,50 ن | (ب) استنتج النهاية التالية : $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathcal{F}(x)$

0,50 ن | ② (أ) بين أن : ——— $(\forall t\geq0)\ :\ 1-t\leq e^{-1}\leq 1-t+\frac{t^2}{2}$

0,50 ن | (ب) بين أن لكل $t$ من المجال $]0,4[$ : $\frac{1}{2t}\leq f(t)\leq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{4-t}\right)$

0,25 ن | (ج) استنتج أن $\mathcal{F}$ متصلة على اليمين في 0

0,50 ن | ③ (أ) بين أن $\mathcal{F}$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ و أحسب $\mathcal{F}^{'}(x)$ من أجل $x>0$ .

0,25 ن | (ب) أدرس تغيرات الدالة $\mathcal{F}$ على $\mathbb{R}_+$ .