التمرين الأول : (3,0 ن)

■ (I) ① أ

ليكن الزوج (a,b) عنصرا من E^2 .

لدينا : $\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}(a\sqrt{2}-1)(b\sqrt{2}-1)$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}-\left(a-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(b\sqrt{2}-1)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}-\left(ab\sqrt{2}-a-b+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$=a+b-ab\sqrt{2}$$

$$=a\perp b$$

■ (I) ① ب

يكفي أن نبين أن : $\forall(a,b)\epsilon E^2\ ;\ a\perp b\ \epsilon\ E$

ليكن الزوج (a,b) عنصرا من E^2 .

يعني : $b\neq\frac{1}{\sqrt{2}}$ و $a\neq\frac{1}{\sqrt{2}}$

و منه : $b\sqrt{2}-1\neq 0$ و $a\sqrt{2}-1\neq 0$

و منه : $(a\sqrt{2}-1)(b\sqrt{2}-1)\neq 0$

و منه : $\frac{-1}{\sqrt{2}}(a\sqrt{2}-1)(b\sqrt{2}-1)\neq 0$

إذن : $\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}(a\sqrt{2}-1)(b\sqrt{2}-1)\neq\frac{1}{\sqrt{2}}$

إذن : $a\perp b\neq\frac{1}{\sqrt{2}}$

أي : $a\perp b\ \epsilon\ \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$

أي : $a\perp b\ \epsilon\ E$

و بالتالي $\perp$ قانون تركيب داخلي في E .

■ (I) ②

لكي تكون $(E,\perp)$ زمرة تبادلية يكفي أن يكون $\perp$ تبادليا و تجميعيا و أن يقبل عنصرا محايدا في E وأن يقبل كل عنصر من E مماثلا من E .

ليكن الزوج (a,b) عنصرا من E^2 .

$$a\perp b\ =\ \frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}(a\sqrt{2}-1)(b\sqrt{2}-1)$$

$$\Leftrightarrow\quad a\perp b\ =\ \frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}(b\sqrt{2}-1)(a\sqrt{2}-1)$$

$$\Leftrightarrow\quad a\perp b\ =b\perp a$$

و منه : $\perp$ تبادلي في E .

ليكن e العنصر المحايد للقانون $\perp$ في E

يعني : $(\forall x\epsilon E)\ ;\ x\perp e=e\perp x=x$

$$\Leftrightarrow\quad(\forall x\epsilon E)\ ;\ x+e-xe\sqrt{2}=x$$

$$\Leftrightarrow\quad(\forall x\epsilon E)\ ;\ e\left(1-x\sqrt{2}\right)=0$$

و بما أن : $x\ \epsilon\ E$ فإن : $x\neq\frac{1}{\sqrt{2}}$

يعني : $1-x\sqrt{2}$ و بالتالي : $e=0$

و بما أن : $0\ \epsilon\ E$ فإن 0 هو العنصر المحايد للقانون $\perp$ في E .

ليكن x عنصرا من E .

و ليكن y مماثل x في E بالنسبة لـ $\perp$

$$x\perp y=y\perp x=0$$

$$\Leftrightarrow\quad x+y-xy\sqrt{2}=0$$

$$\Leftrightarrow\quad y\left(1-x\sqrt{2}\right)=-x$$

$$\Leftrightarrow\quad y=\frac{-x}{\left(1-x\sqrt{2}\right)}=\frac{x}{\left(x\sqrt{2}-1\right)}$$

و للتأكد من أن : $\frac{x}{\left(x\sqrt{2}-1\right)}\neq\frac{1}{\sqrt{2}}$

نفترض التساوي إذن : $x\sqrt{2}=x\sqrt{2}-1$

و منه : $0=-1$ وهذا تناقض واضح.

و من تم فإن : $\frac{x}{\left(x\sqrt{2}-1\right)}\ \epsilon\ E$

يعني أن كل عنصر x من E يقبل مماثلا و هو : $\frac{x}{\left(x\sqrt{2}-1\right)}$ من E بالنسبة للقانون $\perp$

خلاصة : $(E,\perp)$ زمرة تبادلية.

■(II) ① أ

لدينا : $A=\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}$

إذن : $A^2=\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-2\\-2&2\end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow\quad A^2=-2\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}=-2A$$

و لدينا كذلك : $M(a)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\sqrt{2}-a & a\\ a & \sqrt{2}-a\end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow\quad M(a)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & 0\\ 0 & \sqrt{2}\end{pmatrix}+\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-a & a\\ a & -a\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\quad M(a)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\frac{a}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\quad \boxed{M(a)=I+\frac{a}{\sqrt{2}}A}$$

■(II)①ب

يكفي أن نبين أن :

$$(\forall M(a)\epsilon F),(\forall M(b)\epsilon F)\ ;\ M(a)\times M(b)\ \epsilon\ F$$

في البداية نلاحظ أن $M(a)$ مصفوفة مربعة من الرتبة 2 و ذات معاملات حقيقية

إذن المجموعة F جزء من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

ليكن $M(a)$ و $M(b)$ عنصرين من F بحيث : $(a,b)\ \epsilon\ E^2$

لدينا : $M(a)\times M(b)=\left(I+\frac{a}{\sqrt{2}}A\right)\left(I+\frac{b}{\sqrt{2}}A\right)$

$$\Leftrightarrow\quad M(a)\times M(b)=\ I+\frac{b}{\sqrt{2}}A+\frac{a}{\sqrt{2}}A+\frac{ab}{2}A^2$$

$$\Leftrightarrow\quad M(a)\times M(b)=\ I+\frac{b}{\sqrt{2}}A+\frac{a}{\sqrt{2}}A-\frac{ab}{2}A$$

$$\Leftrightarrow\quad M(a)\times M(b)=\ I+\frac{(a+b-ab)}{\sqrt{2}}A$$

$$\Leftrightarrow\quad M(a)\times M(b)=\ M(a\perp b)$$

لكي تكون المصفوفة $M(a\perp b)$ عنصرا من F يكفي أن يكون $a\perp b$ عنصرا من E

و بالفعل $a\perp b\ \epsilon\ E$ لأن $\perp$ قانون تركيب داخلي في E و $a\epsilon E$ و $b\epsilon E$.

إذن نحصل على : $M(a)\times M(b)\ \epsilon\ F$

و بالتالي F جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$

■(II)②أ

لكي يكون التطبيق φ تشاكلا من $(E,\perp)$ نحو $(F,\times)$ يكفي أن نتأكد من أن : $\forall\ (a,b)\ \epsilon\ E^2\ ;\ \varphi(a)\times\varphi(b)=\varphi(a\perp b)$

و لكي يكون التطبيق φ تقابلا يكفي أن يكون شموليا و تباينيا .

ليكن a و b عنصرين من E .

$$\Leftrightarrow\quad \varphi(a)\times\varphi(b)=\ M(a)\times M(b)$$

$$\Leftrightarrow\quad \varphi(a)\times\varphi(b)=\ \left(I+\frac{a}{\sqrt{2}}A\right)\left(I+\frac{b}{\sqrt{2}}A\right)$$

$$\Leftrightarrow\quad \varphi(a)\times\varphi(b)=\ I+\frac{b}{\sqrt{2}}A+\frac{a}{\sqrt{2}}A+\frac{ab}{2}A^2$$

$$\Leftrightarrow\quad \varphi(a)\times\varphi(b)=\ I+\frac{b}{\sqrt{2}}A+\frac{a}{\sqrt{2}}A-\frac{ab}{2}A$$

$$\Leftrightarrow\quad \varphi(a)\times\varphi(b)=\ I+\frac{(a+b-ab)}{\sqrt{2}}A$$

$$\Leftrightarrow\quad \varphi(a)\times\varphi(b)=\ M(a\perp b)$$

$$\Leftrightarrow\quad \varphi(a)\times\varphi(b)=\ \varphi(a\perp b)$$

لتكن S مصفوفة من F .إذن حسب تعريف المجموعة F :

$$(\exists\ a\ \epsilon\ E)\ ;\ S=M(a)$$

و منه حسب تعريف التطبيق φ : $(\exists\ a\ \epsilon\ E)\ ;\ S=\varphi(a)$

و بالتالي φ تطبيق **شمولي** من $(E,\perp)$ نحو $(F,\times)$

ليكن a و b عنصرين من E بحيث : $\varphi(a)=\varphi(b)$

إذن حسب تعريف التطبيق φ : $M(a)=M(b)$

يعني : $\left(I+\frac{a}{\sqrt{2}}A\right)=\left(I+\frac{b}{\sqrt{2}}A\right)$

و منه : $\boxed{a=b}$

و بالتالي : φ تطبيق **تبايني** من $(E,\perp)$ نحو $(F,\times)$

خلاصة : φ تشاكل **تقابلي** من $(E,\perp)$ نحو $(F,\times)$.

■(II)②ب

نعلم أن التشاكل التقابلي يحافظ على بنية الزمرة .

و بما أن $(E,\perp)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد بالقانون $\perp$ هو 0 و كل عنصر x من E يقبل مماثلا $\left(\frac{x}{x\sqrt{2}-1}\right)$

فإن $(F,\times)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد بالقانون $\times$ هو $\varphi(0)$ و كل عنصر y من F يقبل مماثلا $\varphi\left(\frac{y}{y\sqrt{2}-1}\right)$

و لدينا : $\varphi(0)=I+\frac{0}{\sqrt{2}}A=I$

$$\varphi\left(\frac{y}{y\sqrt{2}-1}\right)=I+\frac{y}{\sqrt{2}(y\sqrt{2}-1)}A=I+\frac{y}{2y-\sqrt{2}}A$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}-y}{\sqrt{2}-2y} & \frac{y}{2y-\sqrt{2}}\\ \frac{y}{2y-\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}-y}{\sqrt{2}-2y}\end{pmatrix}=M\left(\frac{y}{y\sqrt{2}-1}\right)$$

و للتأكد :

$$M(y)\times M\left(\frac{y}{y\sqrt{2}-1}\right)=\left(I+\frac{y}{\sqrt{2}}A\right)\left(I+\frac{y}{2y-\sqrt{2}}A\right)$$

$$\begin{aligned}
&= I+\frac{y}{\sqrt{2}}A+\frac{y}{2y-\sqrt{2}}A+\frac{y^2}{\sqrt{2}(2y-\sqrt{2})}A^2\\
&= I+\frac{y}{\sqrt{2}}A+\frac{y}{\sqrt{2}(\sqrt{2}y-1)}A-\frac{2y^2}{2(\sqrt{2}y-1)}A\\
&= I+\left(\frac{2(\sqrt{2}y-1)y+2y-2\sqrt{2}y^2}{2(\sqrt{2}y-1)\sqrt{2}}\right)A\\
&= I+\left(\frac{\cancel{2\sqrt{2}y^2}-\cancel{2y}+\cancel{2y}-\cancel{2\sqrt{2}y^2}}{2(\sqrt{2}y-1)\sqrt{2}}\right)A\\
&= I+0\\
&= I
\end{aligned}$$

التمرين الثاني : (3,5 ن)

■ (I) (1) (أ)

يكفي أن نبين أن :

$$(a+i)^2-(1+a)(1+i)(a+i)+i(1+a^2)=0$$

و للوصول إلى ذلك ننشر أو نعمل. نختار تقنية التعميل.

لدينا : $(a+i)^2+i(1+a^2)=(a+i)^2+i(a^2-i^2)$

$$\begin{aligned}
&=(a+i)(a+i)+i(a-i)(a+i)\\
&=(a+i)(a+i)+(ai+1)(a+i)\\
&=(a+i)(a+i+ai+1)\\
&=(a+i)(a+1)(i+1)
\end{aligned}$$

و منه : $(a+i)$ حل للمعادلة (E) .

■ (I) (1) (ب)

تذكير : إذا كان u و v هما حلا المعادلة : $ax^2+bx+c=0$

فإن : $uv=\frac{c}{a}$ و $u+v=\frac{-b}{a}$

لدينا u و v هما حلا المعادلة (E) .

إذن : $u+v=\dfrac{(1+a)(1+i)}{1}$

نعوض u بقيمته نحصل على : $(i+a)+v=(1+a)(1+i)$

و منه : $v=(1+a)(1+i)-(i+a)$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\quad v=1+i+a+ai-i-a\\
&\Leftrightarrow\quad v=1+ai
\end{aligned}$$

■ (I) (2) (أ)

نعلم أن كل عدد حقيقي يكون دائما مساويا لمرافقه و سوف نستغل هذه الخاصية لكي نبرهن على أن $\frac{u}{v}$ عدد حقيقي .

لدينا : $\overline{\left(\frac{u}{v}\right)}=\overline{\left(\frac{a+i}{ai+1}\right)}=\frac{\bar{a}-i}{1-i\bar{a}}$

بما أن : $|a|=1$ فإن : $|a|=\sqrt{a\bar{a}}=1$

إذن : $\bar{a}=\frac{1}{a}$

و منه : $\overline{\left(\frac{u}{v}\right)}=\dfrac{\bar{a}-i}{1-\bar{a}i}=\dfrac{\frac{1}{a}-i}{1-\frac{1}{a}i}=\dfrac{1-ai}{a-i}$

نضرب بسط و مقام النتيجة الأخيرة في العدد العقدي i نحصل على :

$$\overline{\left(\frac{u}{v}\right)}=\frac{1-ai}{a-i}=\frac{a+i}{ai+1}=\frac{u}{v}$$

إذن نستنتج مما سبق أن : $\overline{\left(\frac{u}{v}\right)}=\frac{u}{v}$

يعني أن العدد $\frac{u}{v}$ عدد حقيقي.

■ (I) (2) (ب)

لدينا : $u^2=(a+i)^2=a^2+2ai-1$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\quad u^2=a\left(a+2i-\frac{1}{a}\right)\\
&\Leftrightarrow\quad u^2=a(a+2i-\bar{a})\\
&\Leftrightarrow\quad u^2=a[(a-\bar{a})+2i]
\end{aligned}$$

■ (I) (2) (ج)

بصفة عامة، إذا كان : $z=\Re e(z)+i\Im m(z)$ فإن $z-\bar{z}=2i\Im m(z)$

لدينا حسب السؤال (ب) : $u^2=a[(a-\bar{a})+2i]$

إذن عمدة الطرف الأيمن يوافق عمدة الطرف الثاني بترديد 2π

إي : $2Arg(u)\equiv Arg\left(a\left((a-\bar{a})+2i\right)\right)[2\pi]$

يعني : $2Arg(u)\equiv Arg(a)+Arg\left((a-\bar{a})+2i\right)[2\pi]$

لدينا : $a-\bar{a}+2i=2i\Im m(a)+2i=2i(\Im m(a)+1)$

و منه : $Arg(\,a-\bar{a}+2i)\equiv Arg(2i)+Arg(\Im m(a)+1)$

لدينا $2i$ عدد تخيلي صرف. إذن : $Arg(2i)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

و لدينا كذلك $(\Im m(a)+1)$ عدد حقيقي. إذن : $Arg(\Im m(a)+1)\equiv 0[2\pi]$

و بالتالي : $2Arg(u)\equiv Arg(a)+\frac{\pi}{2}[2\pi]$

و منه : $Arg(u)\equiv\dfrac{1}{2}Arg(a)+\dfrac{\pi}{4}[\pi]$

■ (II) ①

لتكن H صورة العدد العقدي i

و لتكن $\overline{H}$ صورة العدد العقدي $-i$

و لتكن M صورة العدد العقدي a

لدينا : $|u|+|v|=m$ يعني : $|a+i|+|ai+1|=m$

لنبين أن : $|ai+1|=|a-i|$

لدينا : $ai+1=i(a-i)$

و منه : $|ai+1|=|i(a-i)|$

يعني : $|ai+1|=|i||a-i|$

أي : $|ai+1|=1|a-i|=|a-i|$

إذن : $|a+i|+|a-i|=m$

و منه : $|a-(-i)|+|a-i|=m$

أي : $\overline{H}M+HM=m$

لكي تكون مجموعة النقط (E_m) إهليلج يكفي أن نتحقق من أن : $\overline{H}H\leq m$

لدينا : $\overline{H}H=|i-(-i)|=|2i|=2$

و لدينا حسب المعطيات : $m\geq 2$ إذن : $m\geq \overline{H}H$

و بالتالي (E_m) إهليلج مركزه هو منتصف القطعة $[\overline{H}H]$ أي النقطة O

■ (II) ② (أ)

بما أن (E_m) إهليلج.

فإن معادلته الديكارتية تكتب على الشكل : $(E_m)\ :\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

لنحدد الآن قيمتي العددين a و b .

لدينا $2b=m$ إذن $b=\frac{m}{2}$

و منه : $b^2=\dfrac{m^2}{4}$

و نعلم كذلك أن : $c=\frac{\overline{H}H}{2}=1$ و $c^2=b^2-a^2$

إذن : $a^2=b^2-c^2$

و بالتالي المعادلة الديكارتية للإهليلج (E_m) هي :

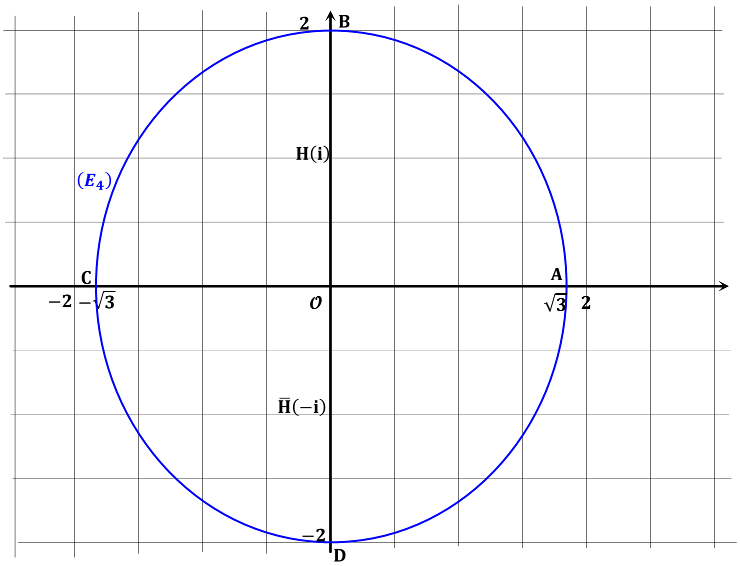
$$(E_m)\ :\ \frac{x^2}{\left(\frac{m^2}{4}-1\right)}+\frac{y^2}{\left(\frac{m^2}{4}\right)}=1$$

يعني : $$\boxed{(E_m)\ :\ x^2+\left(1-\frac{4}{m^2}\right)y^2=\left(\frac{m^2}{4}-1\right)}$$

■ (II) ② (ب)

(E_4) إهليلج يتميز بالعناصر التالية :

- مركزه O
- رؤوسه : $A(\sqrt{3},0)$ و $B(-\sqrt{3},0)$ و $C(0,2)$ و $D(0,-2)$
- بؤرتاه : $H(0,1)$ و $\overline{H}(0,-1)$.
- تباعده المركزي : $e=\frac{c}{b}=\frac{1}{2}$



■ (II) ③

في المجموعة $\mathbb{C}$ لدينا : $A(\sqrt{3})$ و $B(2i)$

إذن في المجموعة $\mathbb{R}^2$ لدينا : $A(\sqrt{3},0)$ و $B(0,2)$

لنحدد معادلة المستقيم (AB) و التي تكتب في شكلها المختصر كالتالي :

$$\boxed{(AB)\ :\ y=px+q}$$

بحيث p هو الميل و q هو الأرتوب عند الأصل.

$$p=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{2}{-\sqrt{3}}=\frac{-2\sqrt{3}}{3}$$

إذن : $(AB)\ :\ y=\dfrac{-2\sqrt{3}}{3}x+q$

و لدينا : $B(0,2)$ نقطة من (AB) .

إذن : $2=\frac{-2\sqrt{3}}{3}\times 0+b$ و منه : $b=2$

و بالتالي : $$\boxed{(AB)\ :\ y=\frac{-2\sqrt{3}}{3}x+2}$$

لكي يكون (AB) مماسا للإهليلج $\left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right)$ يكفي أن نحدد نقطة تقاطع (AB) و $\left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right)$ ثم نحدد بعد ذلك معادلة المماس لـ $\left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right)$ في تلك النقطة و نبين أن تلك المعادلة ما هي إلا معادلة المستقيم (AB) .

على بركة الله، لدينا حسب السؤال ② أ :

$$\left(E_{\frac{8}{\sqrt7}}\right) : \ x^2 + \left(1 - \frac{4}{\left(\frac{8}{\sqrt7}\right)^2}\right) y^2 = \left(\frac{\left(\frac{8}{\sqrt7}\right)^2}{4} - 1\right)$$

أي : $\left(E_{\frac{8}{\sqrt7}}\right) : \ x^2 + \frac{9}{16}y^2 = \frac{9}{7}$

لتحديد نقطة تقاطع (AB) و $\left(E_{\frac{8}{\sqrt7}}\right)$ نحل النظمة التالية :

$$\begin{cases} x^2 + \dfrac{9}{16}y^2 = \dfrac{9}{7} \\ y = \dfrac{-2\sqrt3}{3}x + 2 \end{cases}$$

نعوض y بقيمته في المعادلة $\left(E_{\frac{8}{\sqrt7}}\right)$ نحصل على :

$$x^2 + \frac{9}{16}\left(\frac{-2\sqrt3}{3}x + 2\right)^2 = \frac{9}{7}$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + \frac{9}{16}\left(\frac{4}{3}x^2 + 4 - \frac{8\sqrt3}{3}x\right) = \frac{9}{7}$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{4} - \frac{3\sqrt3}{3}x = \frac{9}{7}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{7}{4}x^2 - \frac{3\sqrt3}{3}x + \frac{27}{28} = 0$$

نضرب طرفي المعادلة في العدد 28 نحصل على :

$$\Leftrightarrow \quad (7x)^2 - 2(7x)(3\sqrt3) + (3\sqrt3)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (7x - 3\sqrt3)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (7x - 3\sqrt3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{x = \frac{3\sqrt3}{7}}$$

نعوض x في معادلة (AB) نجد :

$$\boxed{y = \frac{-2\sqrt3}{3}\cdot\frac{3\sqrt3}{7} + 2 = \frac{8}{7}}$$

من جهة أخرى لدينا معادلة المماس لـ $\left(E_{\frac{8}{\sqrt7}}\right)$ في النقطة $\left(\frac{3\sqrt3}{7}, \frac{8}{7}\right)$

تكتب على شكل : $xx_0 + \frac{9}{16}yy_0 = \frac{9}{7}$

بحيث : $x_0 = \frac{3\sqrt3}{7}$ و $y_0 = \frac{8}{7}$

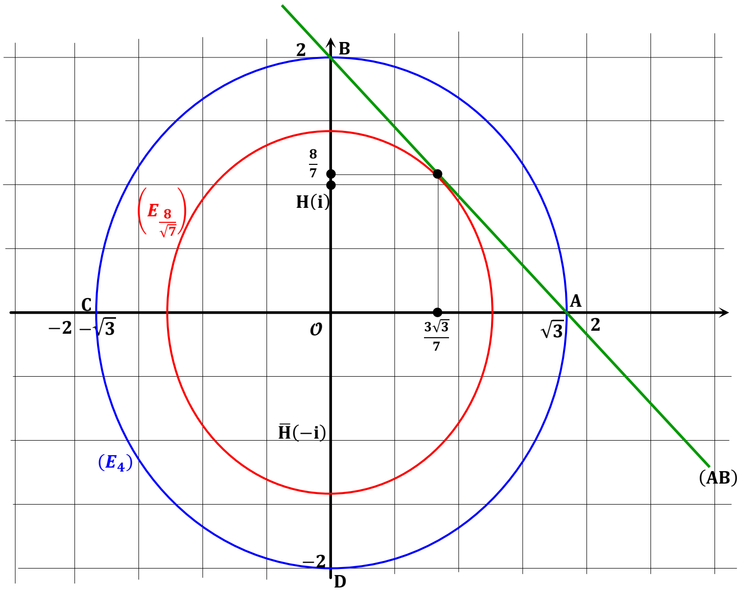
إذن معادلة المماس هي : $\frac{3\sqrt3}{7}x + \frac{9}{16}y\frac{8}{7} = \frac{9}{7}$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{3\sqrt3}{7}x + \frac{9}{14}y = \frac{9}{7}$$

$$\Leftrightarrow \quad y = 2 - \frac{2\sqrt3}{3}x$$

و هذه الكتابة الأخيرة هي بالفعل معادلة المستقيم (AB) .

و بالتالي (AB) هو المماس لـ $\left(E_{\frac{8}{\sqrt7}}\right)$ في النقطة : $\left(\frac{3\sqrt3}{7}, \frac{8}{7}\right)$.



التمرين الثالث : (3,0 ن)

■ ① أ

نُدير خوارزمية أقليدس و نوقف محركاتها فور الحصول على باقي منعدم.

المرحلة الأولى :

232	195
	1
37	

37 غير منعدم إذن واصل.

المرحلة الثانية :

195	37
	5
10	

10 غير منعدم إذن واصل.

المرحلة الثالثة :

37	10
	3
7	

7 غير منعدم إذن واصل.

المرحلة الرابعة :

10	7
3	1

3 غير منعدم إذن واصل.

المرحلة الخامسة :

7	3
1	2

1 غير منعدم إذن واصل.

المرحلة السادسة :

3	1
0	3

0 منعدم إذن **توقف**.

إذن القاسم المشترك الأكبر للعددين 232 و 195 هو آخر باقي غير منعدم أي : 1

و بالتالي : $\boxed{195 \wedge 232 = 1}$

■ 1 ب

في البداية يجب علينا أن نبحث عن الحل البديهي (أو الحل الخاص) لـ (E) .

لدينا حسب خوارزمية أقليدس الواردة في السؤال السابق :

المرحلة الأولى: $37 = 232 - 1 \times 195$

المرحلة الثانية : $10 = 195 - 5 \times 37$

المرحلة الثالثة : $7 = 37 - 3 \times 10$

المرحلة الرابعة : $3 = 10 - 1 \times 7$

المرحلة الخامسة : $1 = 7 - 2 \times 3$

الطريقة هي كالتالي :

ننطلق من المرحلة الخامسة : $1 = 7 - 2 \times 3$

- ثم نعوض 3 بقيمتها ثم نبسط
- ثم نعوض 7 بقيمتها ثم نبسط
- ثم نعوض 10 بقيمتها ثم نبسط
- ثم نعوض 37 بقيمتها ثم نبسط

إلى العمل : لدينا $\boxed{1 = 7 - 2 \times 3}$

نعوض 3 في هذا التعبير لنحصل على التعبير الجديد التالي :

$$\boxed{1 = 3 \times 7 - 2 \times 10}$$

نعوض 7 في هذا التعبيرالأخير لنحصل على التعبير الجديد التالي :

$$\boxed{1 = 3 \times 37 - 11 \times 10}$$

نعوض 10 في هذا التعبيرالأخير لنحصل على التعبير الجديد التالي :

$$\boxed{1 = 58 \times 37 - 11 \times 195}$$

نعوض 37 في هذا التعبيرالأخير لنحصل على التعبير الجديد التالي :

$$\boxed{1 = 58 \times \mathbf{232} - 69 \times \mathbf{195}}$$

إذن الحل الخاص للمعادلة هو الزوج : $(-69, -58)$

سوف نحدد الآن صيغة الحل العام للمعادلة (E)

يعني : $195x - 232y = 1$

و لدينا : $195(-69) - 232(-58) = 1$

ننجز عملية الفرق بين هاتين المتساويتين نحصل على :

$$195(x + 69) - 232(y + 58) = 0$$

يعني : $\boxed{195(x + 69) = 232(y + 58)}$ $(*)$

إذن : $195 \,/\, 232(y + 58)$

إذن حسب $(Gauss)$: $195 \,/\, (y + 58)$ لأن : $195 \wedge 232 = 1$

و منه : $(\exists k' \epsilon \mathbb{Z})$; $y + 58 = 195k'$

يعني : $\boxed{y = 195k' - 58}$

لإيجاد قيمة x نعوض y في المعادلة $(*)$ نحصل على :

$$195(x + 69) = 232(195k')$$

يعني : $\boxed{x = 232k' - 69}$

بما أن k' عدد نسبي فإن : $(\exists k \epsilon \mathbb{Z})$; $k' = k + 1$

و منه : $x = 232(k + 1) - 69$

أي : $\boxed{x = 232k + 163}$

و لدينا كذلك : $y = 195k' - 58$

أي : $y = 195(k + 1) - 58$

و منه : $\boxed{y = 195k + 137}$

و بالتالي مجموعة حلول المعادلة (E) هي :

$$\boxed{\mathcal{S} = \{(232k + 163 \,;\, 195k + 137) \;\;/\;\; k \epsilon \mathbb{Z}\}}$$

■ 1 ج

ننطلق من الشرط : $195d \equiv 1[232]$

الذي يعني : $232 \,/\, (195d - 1)$

و منه : $(\exists b \epsilon \mathbb{Z})$; $232b = 195d - 1$

أي : $195d - 232b = 1$

و منه : (d, b) حل للمعادلة (E) .

إذن (d, b) عنصر من $(\mathcal{S})$.

و منه : $(\exists k \epsilon \mathbb{Z})$; $\begin{cases} d = 163 + 232k \\ b = 137 + 195k \end{cases}$

لدينا الشرط الآخر $0 \le d \le 232$

يعني : $0 \le 163 + 232k \le 232$

و منه : $0,7 \le k \le 0,2$

العدد الصحيح النسبي الوحيد المحصور بين 0,2 و 0,7 هو 0

إذن : $\boxed{d = 163 + 232 \times 0 = 163}$

■ 2

يكفي : أن نتحقق من أن جميع الأعداد الأولية الأصغر من أو تساوي $\sqrt{233}$ لا تقسم العدد 233 .

و تلك الأعداد الأولية هي : 2 و 3 و 5 و 7 و 11 و 13

■ 3 أ

ليكن a و b عنصرين من $A \setminus \{0\}$ بحيث : $f(a) = f(b)$.

لدينا : $\begin{cases} a^{195} \equiv f(a)[233] \\ b^{195} \equiv f(b)[233] \end{cases}$

بما أن $f(a) = f(b)$ فإن : $a^{195} \equiv b^{195}[233]$

و منه : $a^{195d} \equiv b^{195d}[233]$

و لدينا : $195d \equiv 1[232]$ يعني : $195d = 232k + 1$

إذن : $\boxed{a^{232k+1} \equiv b^{232k+1}[233]}$

من جهة أخرى لدينا حسب مبرهنة فيرما : $a^{232} \equiv 1[233]$

إذن : $a^{232k} \equiv 1[233]$ و منه : $\boxed{a^{232k+1} \equiv a[233]}$ (1)

بنفس الطريقة نجد : $\boxed{b^{232k+1} \equiv b[233]}$ (2)

بما أن : $a^{232k+1} \equiv b^{232k+1}[233]$ فإن : $a \equiv b[233]$

و ذلك باستعمال النتيجتين (1) و (2)

و منه : 233 يقسم $|a-b|$.

لدينا : $a \epsilon A$ و $b \epsilon A$

يعني : $0 < a \le 232$ و $0 < b \le 232$

و منه : $|a-b| \le 232$

نلاحظ أن 233 يقسم عددا أصغر منه و هو $|a-b|$ إذن : $|a-b| = 0$

و بالتالي : $a = b$

■ 3 ب

ليكن a و b عنصرين من A بحيث: $f(a) = b$

لدينا : $a^{195} \equiv f(a)[233]$

و بما أن : $f(a) = b$ فإن : $a^{195} \equiv b[233]$

و منه : $\boxed{a^{195d} \equiv b^{d}[233]}$ (3)

من جهة أخرى لدينا حسب مبرهنة $(Fermat)$: $a^{232} \equiv 1[233]$

إذن : $\boxed{a^{-232k} \equiv 1[233]}$ (4)

نضرب المتوافقتين (3) و (4) طرفا بطرف نحصل على :

$a^{195d-232k} \equiv b^{d}[233]$

و منه : $a^{1} \equiv b^{163}[233]$ لأن $d = 163$ هو العدد الوحيد الذي يحقق الشرطين $195d \equiv 1[232]$ و $d\epsilon A$

و منه : $a \equiv b^{163}[233]$ هو الجواب الأخير.

كما يمكن إظافة ما يلي : $233 / (a - b^{163})$

يعني : $(\exists k \epsilon \mathbb{Z})$; $(a - b^{163}) = 233k$

أي : $\boxed{a = b^{163} + 233k \ ; \ k \epsilon \mathbb{Z}}$

■ 3 ج

نستنتج من نتيجة السؤال 3 أ :

$\boxed{\text{أن } f \text{ تطبيق تبايني من } A \text{ نحو } A}$

كما نستنتج من نتيجة السؤال 3 ب :

$\boxed{\text{أن التطبيق } f \text{ شمولي من } A \text{ نحو } A}$

إذن f تقابل من A نحو A و تقابله العكسي f^{-1} نستنتجه من جواب السؤال ب:

$$\boxed{\begin{array}{l} f : A \to A \\ \quad a \to f(a) \equiv a^{195}[233] \end{array}}$$

و

$$\boxed{\begin{array}{l} f^{-1} : A \to A \\ \quad b \to f^{-1}(b) \equiv b^{163}[233] \end{array}}$$

التمرين الرابع : (10,5 ن)

(I)(1)

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$.

لدينا : $g^{'}(x) = e^{x} + e^{x}(x-1) = xe^{x}$

بما أن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R}) \ ; \ e^{x} > 0$

فإن إشارة $g^{'}(x)$ متعلقة فقط بإشارة x .

إذا كان $x = 0$ فإن $g^{'}(x) = 0$

إذا كان $x > 0$ فإن $g^{'}(x) > 0$

إذا كان $x < 0$ فإن $g^{'}(x) < 0$

و لدينا : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^{x} = 0$

إذن : $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 1$

و لدينا كذلك : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

نلخص النتائج المحصل عليها في الجدول التالي :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

نلاحظ حسب هذا الجدول أن القيمة الدنوية للدالة g هي 0

و g دالة متصلة على $\mathbb{R}$.

إذن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R}) \ ; \ g(x) \geq 0$

(I)(2)

لدينا g دالة تناقصية قطعا على المجال $]-\infty, 0[$

إذن : $(\forall x < 0) \ ; \ g(x) > 0$

و لدينا g دالة تزايدية قطعا على المجال $]0, +\infty[$

إذن : $(\forall x > 0) \ ; \ g(x) > 0$

و لدينا العنصر الوحيد الذي صورته بالدالة g منعدمة هو 0 . إذن : $\boxed{g(0) = 0}$.

(II)(1)

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{e^{x} - 1} \right)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{\frac{e^{x}}{x} - \frac{1}{x}} \right) = \frac{1}{(+\infty) - 0} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) + x) = 0 + (+\infty) = +\infty$$

(II)(2)

لدينا : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{x}{e^{x} - 1} \right) = \lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{\frac{e^{x} - e^{0}}{x - 0}} \right)$

بما أن : $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{e^{x} - e^{0}}{x - 0} \right) = e^{0} = 1$

فإن : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \frac{1}{1} = 1 = f(0)$

و منه f دالة متصلة في الصفر.

(II)(3) أ

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}^{*}$.

$$f^{'}(x) = \left(\frac{x}{e^{x} - 1} \right)^{'} = \frac{(e^{x} - 1) - xe^{x}}{(e^{x} - 1)^{2}}$$

$$\Leftrightarrow \ f^{'}(x) = \frac{-1 - e^{x}(x-1)}{(e^{x} - 1)^{2}} = \frac{-g(x)}{(e^{x} - 1)^{2}}$$

(II)(3) ب

لدينا حسب السؤال (أ) $f^{'}(x) = \frac{-g(x)}{(e^{x} - 1)^{2}}$

بما أن $(\forall x \epsilon \mathbb{R}^{*}) \ ; \ 0 < (e^{x} - 1)^{2}$

فإن إشارة $f'(x)$ تتعلق فقط بإشارة $g(x)$

لدينا g تنعدم في نقطة واحدة أفصولها 0 و ذلك حسب السؤال **(I)(2)**

إذن $f^{'}(x)$ تنعدم إذا كان $x = 0$

و لدينا كذلك حسب السؤال **(I)(1)** $(\forall x \epsilon \mathbb{R}) \ ; \ g(x) \geq 0$

إذن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R}^{*}) \ ; \ f^{'}(x) \leq 0$

و لدينا : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{e^{x} - 1} \right) = \frac{-\infty}{0 - 1} = +\infty$

و لدينا كذلك حسب السؤال **(II)(1)** : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

و من هذه الدراسة نستنتج جدول تغيرات الدالة f كما يلي :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	0

■(II)④أ

لدينا : $J(x)=\int_0^x te^{-t}\,dt$

نضع : $u(t)=t$ إذن : $u'(t)=1$

و نضع : $v'(t)=e^{-t}$ إذن : $v(t)=-e^{-t}$

و منه : $J(x)=[uv]_0^x-\int_0^x u'v\,dt$

$$\Leftrightarrow\quad J(x)=[t(-e^{-t})]_0^x-\int_0^x(-e^{-t})\,dt$$

$$\Leftrightarrow\quad J(x)=[-te^{-t}]_0^x+[-e^{-t}]_0^x$$

$$\Leftrightarrow\quad J(x)=-xe^{-x}-e^{-x}+1$$

$$\Leftrightarrow\quad \boxed{J(x)=e^{-x}(e^x-x-1)}$$

■(II)④ب

ليكن x عددا حقيقيا . نفصل بين ثلاث حالات :

الحالة الأولى : إذا كان x موجب فإن : $|x|=x$

و منه : $|x|+x=2x$ و $x-|x|=0$

ليكن $0\leq t\leq x$ إذن $e^{-x}\leq e^{-t}\leq e^0$

و منه : $te^{-x}\leq te^{-t}\leq t$

ندخل التكامل على الترتيب نحصل على :

$$\int_0^x te^{-x}\,dt\leq\int_0^x te^{-t}\,dt\leq\int_0^x t\,dt$$

يعني : $e^{-x}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x\leq J(x)\leq\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x$

ومنه : $\frac{x^2}{2}e^{-x}\leq J(x)\leq\frac{x^2}{2}$

و بالتالي : $\boxed{\frac{x^2}{2}e^{-\left(\frac{x+|x|}{2}\right)}\leq J(x)\leq\frac{x^2}{2}e^{-\left(\frac{x-|x|}{2}\right)}}$

الحالة الثانية : إذا كان x سالب فإن : $|x|=-x$

و منه : $|x|+x=0$ و $x-|x|=2x$

ليكن $x\leq t\leq 0$ إذن $e^0\leq e^{-t}\leq e^{-x}$

و منه : $te^{-x}\leq te^{-t}\leq t$ (تغير الترتيب لأن t عدد سالب)

ندخل التكامل على الترتيب نحصل على :

$$\int_x^0 te^{-x}\,dt\leq\int_x^0 te^{-t}\,dt\leq\int_x^0 t\,dt$$

$$\Leftrightarrow\quad e^{-x}\left[\frac{t^2}{2}\right]_x^0\leq -J(x)\leq\left[\frac{t^2}{2}\right]_x^0$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{-x^2}{2}e^{-x}\leq -J(x)\leq\frac{-x^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{x^2}{2}\leq J(x)\leq\frac{x^2}{2}e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{x^2}{2}e^{-\left(\frac{x+|x|}{2}\right)}\leq J(x)\leq\frac{x^2}{2}e^{-\left(\frac{x-|x|}{2}\right)}$$

الحالة الثالثة : إذا كان x منعدم فإن : $J(0)=0$

و منه : $\boxed{\frac{x^2}{2}e^{-\left(\frac{x+|x|}{2}\right)}\leq J(x)\leq\frac{x^2}{2}e^{-\left(\frac{x-|x|}{2}\right)}}$

لأن : $0\leq 0\leq 0$

خلاصة :

$$\boxed{(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\quad \frac{x^2}{2}e^{-\left(\frac{x+|x|}{2}\right)}\leq J(x)\leq\frac{x^2}{2}e^{-\left(\frac{x-|x|}{2}\right)}}$$

■(II)④ج

لدينا حسب السؤال ب

$$(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\quad \frac{x^2}{2}e^{-\left(\frac{x+|x|}{2}\right)}\leq J(x)\leq\frac{x^2}{2}e^{-\left(\frac{x-|x|}{2}\right)}$$

و منه حسب السؤال أ

$$\frac{x^2}{2}e^{-\left(\frac{x+|x|}{2}\right)}\leq e^{-x}(e^x-1-x)\leq\frac{x^2}{2}e^{-\left(\frac{x-|x|}{2}\right)}$$

نفترض أن $x\neq 0$ ثم نضرب أطراف هذا التأطير في العدد الموجب $\frac{e^x}{x^2}$

علما أن هذا الترتيب سوف لن يتغير نحصل على :

$$\frac{1}{2}e^xe^{-\left(\frac{x+|x|}{2}\right)}\leq\frac{(e^x-1-x)}{x^2}\leq\frac{1}{2}e^xe^{-\left(\frac{x-|x|}{2}\right)}$$

و بالتالي بعد تبسيط طرف اليمين و طرف اليسار نحصل على :

$$\boxed{\frac{1}{2}e^{\left(\frac{x-|x|}{2}\right)}\leq\frac{(e^x-1-x)}{x^2}\leq\frac{1}{2}e^{\left(\frac{x+|x|}{2}\right)}}$$

■(II)④د

لدينا حسب نتيجة السؤال ج

$$\boxed{\underbrace{\frac{1}{2}e^{\left(\frac{x-|x|}{2}\right)}}_{\xrightarrow[x\to 0]{}\ \frac{1}{2}}\leq\frac{(e^x-1-x)}{x^2}\leq\underbrace{\frac{1}{2}e^{\left(\frac{x+|x|}{2}\right)}}_{\xrightarrow[x\to 0]{}\ \frac{1}{2}}}$$

إذن : $\boxed{\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1-x}{x^2}\right)=\frac{1}{2}}$

و لدينا من جهة أخرى :

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x-e^x+1}{xe^x-x}\right)$$

نحاول إظهار الكمية $\left(\frac{e^x-1-x}{x^2}\right)$ نحصل على :

$$\lim_{x\to 0^+}-\left(\frac{e^x-1-x}{x^2}\right)\left(\frac{x}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to 0^+}-\left(\frac{e^x-1-x}{x^2}\right)f(x)$$

لدينا حسب السؤال (II) 2 : f متصلة في 0

إذن : $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)=1$

و بالتالي نستنتج أن : $\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right)=\frac{-1}{2}\times 1=\boxed{\frac{-1}{2}}$

إذن f قابلة للاشتقاق في الصفر و $f'(0)=\frac{-1}{2}$

■ (II) 5 أ

لدينا : $f'(x)=\frac{-g(x)}{(e^x-1)^2}$

$$\Rightarrow\quad f''(x)=\frac{-g'(x)(e^x-1)^2+g(x)(2(e^x-1)e^x)}{(e^x-1)^4}$$

$$=\frac{-xe^x(e^x-1)^2+(1+(x-1)e^x)(2(e^x-1)e^x)}{(e^x-1)^4}$$

$$=\frac{-xe^x(e^x-1)^2+2(e^x-1)e^x+2(x-1)(e^x-1)e^{2x}}{(e^x-1)^4}$$

$$=\frac{-xe^x(e^x-1)+2e^x+2(x-1)e^{2x}}{(e^x-1)^3}$$

$$=\frac{e^x(-xe^x+x+2+2xe^x-2e^x)}{(e^x-1)^3}$$

$$=\frac{e^x(xe^x+x+2-2e^x)}{(e^x-1)^3}$$

$$=\frac{e^x\big(e^x(x-2)+(x+2)\big)}{(e^x-1)^3}$$

■ (II) 5 ب

نضع : $\varphi(x)=e^x(x-2)+2+x$

لدينا : $\varphi'(x)=(xe^x-2e^x+2+x)'$

$$\Leftrightarrow\quad \varphi'(x)=xe^x+e^x-2e^x+1$$

$$\Leftrightarrow\quad \varphi'(x)=xe^x-e^x+1$$

$$\Leftrightarrow\quad \varphi'(x)=e^x(x-1)+1$$

$$\Leftrightarrow\quad \varphi'(x)=g(x)$$

و نعلم حسب السؤال (I) 1 : $g(x)\geq 0\ ;\ (\forall x\epsilon\mathbb{R})$

و بالتالي : $\varphi'(x)\geq 0\ ;\ (\forall x\epsilon\mathbb{R})$

أي φ دالة تزايدية على $\mathbb{R}$.

و لدينا : $\varphi(0)=0$ و f دالة تزايدية على $\mathbb{R}$.

إذا كان $x\geq 0$ فإن : $\varphi(x)\geq\varphi(0)=0$

إذا كان $x\leq 0$ فإن : $\varphi(x)\leq\varphi(0)=0$

■ (II) 5 ج

لدينا : $f''(x)=\frac{e^x}{(e^x-1)^3}\big(e^x(x-2)+(x+2)\big)$

$$f''(x)=\frac{e^x}{(e^x-1)^2}\times\frac{\varphi(x)}{(e^x-1)}$$

لدينا : $(e^x-1)^2>0$ و $e^x>0\ ;\ (\forall x\epsilon\mathbb{R}^*)$

إذن إشارة $f''(x)$ تتعلق بإشارة $\varphi(x)$ و (e^x-1)

إذا كان $x>0$ فإن : $\varphi(x)>0$ و $e^x>e^0$

إذن : $\boxed{f''(x)>0}$

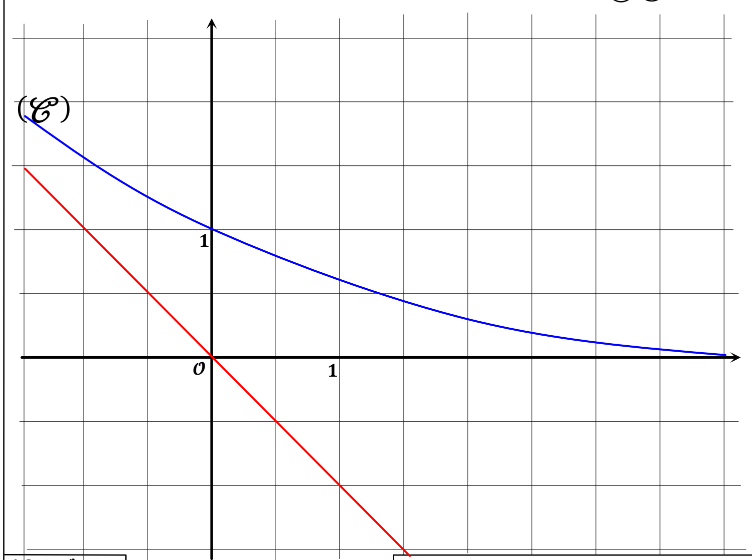
إذا كان $x<0$ فإن $\varphi(x)<0$ و $e^x<e^0$

إذن : $f''(x)>0$

و في كلتا الحالتين نلاحظ أن : $f''(x)>0\ ;\ (\forall x\epsilon\mathbb{R}^*)$

و هذا يعني أن منحنى الدالة f محدب

■ (II) 5 د



■ (III)①

لنحل المعادلة : $f(x)=x$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{e^x-1}=x$$

$$\Leftrightarrow x=xe^x-x$$

$$\Leftrightarrow e^x=2$$

$$\Leftrightarrow x=\ln 2$$

إذن $\ln 2$ هو الحل الوحيد للمعادلة $f(x)=x$

■ (III)②أ

يكفي أن نبين أن : $\frac{-1}{2}\le f'(x)\le\frac{1}{2}$

لدينا حسب السؤال (II)⑤ج $(\forall x\epsilon\mathbb{R}^*)\ ;\ f''(x)>0$

إذن f' دالة تزايدية على $\mathbb{R}^*$

إذا كان $x>0$ فإن : $f'(x)\ge f'(0)$

يعني : $\boxed{f'(x)\ge\frac{-1}{2}}$ (1)

لدينا من جهة أخرى : $f'(x)=\frac{-g(x)}{(e^x-1)^2}\le 0$

و ذلك لأن : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ g(x)\ge 0$

إذن من الكتابة $f'(x)\le 0$ نستنتج أن : $f'(x)\le 0\le\frac{1}{2}$

و منه : $\boxed{f'(x)\le\frac{1}{2}}$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن : $(\forall x\epsilon\mathbb{R}^*)\ ;\ \frac{-1}{2}\le f'(x)\le\frac{1}{2}$

يعني : $(\forall x\epsilon\mathbb{R}^*)\ ;\ |f'(x)|\le\frac{1}{2}$

■ (III)②ب

بما أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ فإنه بإمكاننا تطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على أي مجال من $\mathbb{R}$. نختار المجال الذي طرفاه $\ln 2$ و u_n .

إذن يوجد عدد c محصور بين $\ln 2$ و u_n بحيث :

$$\frac{f(u_n)-f(\ln 2)}{u_n-\ln 2}=f'(c)$$

$$\Rightarrow \left|\frac{f(u_n)-f(\ln 2)}{u_n-\ln 2}\right|=|f'(c)|$$

$$\Rightarrow |f(u_n)-f(\ln 2)|=|f'(c)||u_n-\ln 2|$$

بما أن : $(\forall x\epsilon\mathbb{R}^*)\ ;\ f'(x)\le\frac{1}{2}$

إذن : $f'(c)\le\frac{1}{2}$ و منه : $|f'(c)|\le\frac{1}{2}$

و بالتالي : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ |f(u_n)-f(\ln 2)|\le\frac{1}{2}|u_n-\ln 2|$

$$\Leftrightarrow \boxed{(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ |u_{n+1}-\ln 2|\le\frac{1}{2}|u_n-\ln 2|}$$

■ (III)②ج

لدينا حسب السؤال ب

$$(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ |u_{n+1}-\ln 2|\le\frac{1}{2}|u_n-\ln 2|$$

$$\Leftrightarrow |u_n-\ln 2|\le\frac{1}{2}|u_{n-1}-\ln 2|$$

$$\le\left(\frac{1}{2}\right)^2|u_{n-2}-\ln 2|$$

$$\le\left(\frac{1}{2}\right)^3|u_{n-3}-\ln 2|$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\le\left(\frac{1}{2}\right)^n|u_{n-n}-\ln 2|$$

نستنتج إذن أن :

$$(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ |u_n-\ln 2|\le\left(\frac{1}{2}\right)^n|1-\ln 2|$$

$\left(\frac{1}{2}\right)^n$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ محصور بين 1 و -1

إذن : $\lim\limits_{n\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$

و منه : $\lim\limits_{n\infty}|u_n-\ln 2|=0$

يعني : $\lim\limits_{n\infty}u_n=\ln 2$

و بالتالي : $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ متتالية متقاربة و تؤول إلى $\ln 2$.

■ (IV)①أ

باستعمال البرهان بفصل الحالات نفصل بين حالتين :

<u>الحالة الأولى : إذا كان $x>0$.</u>

لدينا : $F(x)=\int_x^{2x}f(t)\,dt$

مع العلم أن f دالة تناقصية على $\mathbb{R}$ و ذلك حسب السؤال (II)③ب

ليكن : $x\le t\le 2x$

يعني : $f(x)\ge f(t)\ge f(2x)$

و منه : $\dfrac{x}{e^x-1} \geq \dfrac{t}{e^t-1} \geq \dfrac{2x}{e^{2x}-1}$

ندخل التكامل على هذا الترتيب نحصل على :

$$\int_x^{2x}\left(\frac{x}{e^x-1}\right)dt \geq \int_x^{2x}\left(\frac{t}{e^t-1}\right)dt \geq \int_x^{2x}\left(\frac{2x}{e^{2x}-1}\right)dt$$

و منه : $\boxed{\left(\dfrac{x^2}{e^x-1}\right) \geq F(x) \geq \left(\dfrac{2x^2}{e^{2x}-1}\right)}$

الحالة الثانية : إذا كان $x<0$.

ليكن : $2x \leq t \leq x$

يعني : $f(2x) \geq f(t) \geq f(x)$

$$\int_{2x}^{x} f(2x)\,dt \geq \int_{2x}^{x} f(t)\,dt \geq \int_{2x}^{x} f(x)\,dt$$

$$-\int_{x}^{2x} f(2x)\,dt \geq -\int_{x}^{2x} f(t)\,dt \geq -\int_{x}^{2x} f(x)\,dt$$

$$-xf(2x) \geq -F(x) \geq -xf(x)$$

$$xf(2x) \leq F(x) \leq xf(x)$$

$$\boxed{\left(\frac{2x^2}{e^{2x}-1}\right) \leq F(x) \leq \left(\frac{x^2}{e^x-1}\right)}$$

خلاصة : $\boxed{(\forall x\epsilon\mathbb{R}^*)\ ;\ \left(\dfrac{2x^2}{e^{2x}-1}\right) \leq F(x) \leq \left(\dfrac{x^2}{e^x-1}\right)}$

■(IV)(1)(ب)

نعلم أن : $(\forall x\epsilon\mathbb{R}^*)\ ;\ \left(\dfrac{2x^2}{e^{2x}-1}\right) \leq F(x) \leq \left(\dfrac{x^2}{e^x-1}\right)$

و لدينا : $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2x^2}{e^{2x}-1}\right) = \lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{x}{\dfrac{e^{2x}-e^0}{2x-0}}\right) = \left(\dfrac{0}{e^0}\right) = 0$

و لدينا كذلك: $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{x^2}{e^x-1}\right) = \lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{x}{\dfrac{e^x-e^0}{x-0}}\right) = \left(\dfrac{0}{e^0}\right) = 0$

و بالتالي : $\lim\limits_{x\to0} F(x) = 0 = F(0)$

أي F دالة متصلة في 0

■(IV)(1)(ج)

لدينا : $(\forall x\epsilon\mathbb{R}^*)\ ;\ \left(\dfrac{2x^2}{e^{2x}-1}\right) \leq F(x) \leq \left(\dfrac{x^2}{e^x-1}\right)$

$$\Leftrightarrow\quad \underbrace{\left(\frac{2x}{e^{2x}-1}\right)}_{\xrightarrow[x\to0]{}\ 1} \leq \frac{F(x)}{x} \leq \underbrace{\left(\frac{x}{e^x-1}\right)}_{\xrightarrow[x\to0]{}\ 1}$$

و منه : $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{F(x)}{x}\right) = \lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{F(x)-F(0)}{x-0}\right) = 1 = F'(0)$

■(IV)(2)(أ)

لدينا الدالة f متصلة على $\mathbb{R}$ و بالخصوص على $[x,2x]$ مع $x\epsilon\mathbb{R}^*$

إذن f تقبل دالة أصلية h بحيث : $F(x) = h(2x) - h(x)$

لدينا $x \to h(x)$ و $x \to 2x$ دالتين قابلتين للإشتقاق على $\mathbb{R}^*$.

إذن $x \to h(2x)$ دالة قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}^*$ لأنها مركب دالتين قابلتين للإشتقاق على $\mathbb{R}^*$.

و لدينا : $F(x) = h(2x) - h(x)$

إذن : $F'(x) = 2h'(2x) - h'(x)$

$$\Leftrightarrow\quad F'(x) = 2f(2x) - f(x)$$

$$\Leftrightarrow\quad F'(x) = 2\left(\frac{2x}{e^{2x}-1}\right) - \left(\frac{x}{e^x-1}\right)$$

و بما أنك تلميذ من السنة الثانية بكالوريا علوم رياضية

فإنك تستطيع الوصول إلى النتيجة انطلاقا من التعبير أعلاه.

و منه : $\Leftrightarrow\ \boxed{F'(x) = \left(\dfrac{3-e^x}{e^x+1}\right)f(x)}$

■(IV)(2)(ب)

لدينا حسب جدول إشارة f في السؤال(II)(3)(ب)

$$\boxed{(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ f(x) > 0}$$

و ذلك لأن f متصلة و تناقصية قطعا على $\mathbb{R}$ و قيمتها الدنوية هي : 0

إذن إشارة $F'(x)$ متعلقة فقط بإشارة $(3-e^x)$.

لأن : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ e^x+1 > 0$

نستنتج إذن جدول تغيرات F كما يلي :

x	$-\infty$		0		$\ln 3$		$+\infty$
$F'(x)$		$+$	1	$+$	0	$-$	
F	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$F(\ln 3)$	$\searrow$	0

■ و الحمد لله رب العالمين ■